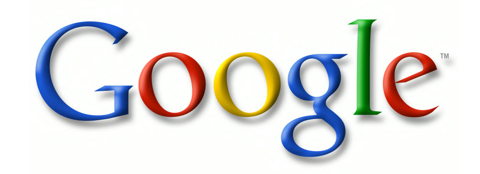
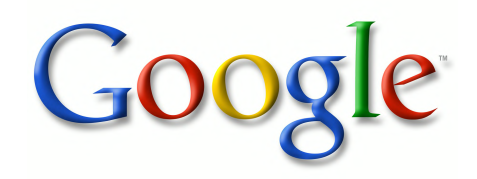





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur
de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

Lucien LÉVY
Agrégé des sciences mathématiques,
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

3e SÉRIE

TOME PREMIER

Année 1887.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1887

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE ENTIER EN FRACTION CONTINUE

Par M. **Ed. Lucas**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

… si a désigne la racine carrée … …ns un nombre entier N … ca… … $\sqrt{N}$ est dévelo… tion p…

La pé… …emen… quotient inc… … quotients incom… …ets e… période forment une suit… termes quelconques équidist…

Degen a publié à Copenhague … pement de la racine carrée des n… fractions continues, sous le titre :

Canon Pellianus *sive tabula simplicissim… bratissimæ* $y^2 = ax^2 + 1$ *solutionem, pro s… valoribus ab* 1 *usque ad* 1000, *in numeris rati… integris exhibens.*

Dans la préface de cet ouvrage, l'auteur … que l'on peut obtenir immédiatement le dév…



JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

SUR LE DÉVELOPPEMENT

DE LA RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE ENTIER EN FRACTION CONTINUE

Par M. **Ed. Lucas**, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

On sait que si a désigne la racine carrée du plus grand carré contenu dans un nombre entier N qui n'est pas un carré parfait, l'irrationnelle $\sqrt{N}$ est développable en une fraction périodique mixte.

La période commence immédiatement après le premier quotient incomplet a; le dernier terme de la période des quotients incomplets est $2a$, et les autres termes de cette période forment une suite symétrique dans laquelle deux termes quelconques équidistants des extrêmes sont égaux.

Degen a publié à Copenhague en 1817, la table du développement de la racine carrée des mille premiers nombres en fractions continues, sous le titre :

CANON PELLIANUS *sive tabula simplicissimam æquationis celebratissimæ* $y^2 = ax^2 + 1$ *solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab* 1 *usque ad* 1000, *in numeris rationalibus iisdemque integris exhibens.*

Dans la préface de cet ouvrage, l'auteur fait observer que l'on peut obtenir immédiatement le développement de

$\sqrt{N}$ pour les nombres contenus dans les douze formes suivantes :

	N	QUOTIENTS INCOMPLETS
I	a^2+1	$a,\ 2a;$
II	a^2-1	$a-1,\ 1,\ 2(a-1);$
III	a^2+2	$a,\ a,\ 2a;$
IV	a^2-2	$a-1,\ 1,\ a-2,\ 1,\ 2(a-1);$
V	a^2+a	$a,\ 2,\ 2a;$
VI	a^2-a	$a-1,\ 2,\ 2(a-1);$
VII	a^2b^2+a	$ab,\ 2b,\ 2ab;$
VIII	a^2b^2-a	$ab-1,\ 1,\ 2(b-1),\ 1,\ 2(ab-1);$
IX	a^2b^2+2a	$ab,\ b,\ 2ab;$
X	a^2b^2-2a	$ab-1,\ 1,\ b-2,\ 1,\ 2(ab-1);$
XI	$(2a+1)^2+4$	$2a+1,\ a,\ 1,\ 1,\ a,\ 2(2a+1);$
XII	$(2a+1)^2-4$	$2a,\ 1,\ a-1,\ 2,\ a-1,\ 1,\ 4a.$

Après avoir fait observer que le développement des dix premières formes était connu depuis longtemps, Degen ajoute que les deux dernières formes lui appartiennent et qu'il n'en connaît pas d'autres. Nous allons indiquer un procédé qui permet de trouver sans exception toutes les formes générales du développement de la racine carrée d'un nombre entier et qui conduit ainsi à la classification de tous les nombres entiers d'après la nature de leur développement.

En laissant de côté les carrés parfaits, la période contiendra un, deux, trois, ... p, quotients incomplets et nous dirons qu'un nombre est de la $p^{\text{ième}}$ classe, lorsque le développement de sa racine carrée, en fraction continue, contiendra p quotients incomplets.

NOMBRES DE LA PREMIÈRE CLASSE

Les quotients incomplets successifs sont

$$a,\quad 2a,\quad 2a,\quad 2a,\ldots,$$

et l'on a, en retournant au nombre qui donne naissance à cette fraction périodique

$$N = a^2 + 1.$$

C'est la formule (I) de Degen.

NOMBRES DE LA DEUXIÈME CLASSE

Les quotients incomplets successifs sont, avec $b \lessgtr 2a$,

$$a,\ b,\ 2a;\quad b,\ 2a;\quad b,\ 2a;\ldots;$$

on trouve pour N la valeur

$$N = a^2 + \frac{2a}{b};$$

mais pour que N soit entier, il faut faire l'une des quatre hypothèses suivantes, en désignant par α et β des nombres entiers

1° $b = 1$ d'où $N = a^2 + 2a$;
2° $b = 2$ — $N = a^2 + a$;
3° $a = \alpha b$ — $N = \alpha^2 b^2 + 2\alpha$;
4° $b = 2\beta$, $a = \alpha\beta$ — $N = \alpha^2\beta^2 + \alpha$.

La première hypothèse donne les formes

$$N = a^2 + 2a = (a + 1)^2 - 1,$$

qui correspondent aux formules (IX) et (II) de Degen; la deuxième hypothèse donne les formes

$$N = a^2 + a = (a - 1)^2 - (a - 1),$$

qui correspondent aux formules (V) et (VI); la troisième hypothèse donne la forme

$$N = a^2 b^2 + 2a$$

qui correspond à la formule (IX) et pour $a = 1$ à la formule (III). Enfin la quatrième hypothèse donne la forme qui correspond à la formule (VII). Il n'existe pas d'autres nombres de deuxième classe.

NOMBRES DE LA TROISIÈME CLASSE

Les quotients incomplets successifs seront

$$a,\ b,\ b,\ 2a;\ b,\ b,\ 2a;\ b,\ b,\ 2a;\ldots$$

en supposant encore $b \gtrless 2a$. En remontant à la valeur de la fraction continue, on trouve

$$N = a^2 + \frac{2ab + 1}{b^2 + 1}.$$

Pour que la fraction précédente se réduise à un nombre entier, nous poserons

$$\frac{2ab + 1}{b^2 + 1} = \lambda$$

d'où
$$a = \frac{\lambda(b^2 + 1) - 1}{2b};$$
mais pour que λ et a soient entiers, on voit facilement que b est un nombre pair 2β et que $\lambda - 1$ est un multiple de 4β que nous poserons égal à $4\alpha\beta$.

Donc tous les nombres de la troisième classe sont contenus dans la formule
$$N = (4\alpha\beta^2 + \alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta + 1,$$
ou
$$N = (4\alpha\beta^2 - \alpha + \beta)^2 + (4\alpha\beta + 1)^2;$$
les quotients incomplets sont
$$4\alpha\beta^2 + \alpha + \beta, \quad 2\beta, 2\beta, \quad 2(4\alpha\beta^2 + \alpha + \beta);\ldots$$
On trouve en particulier pour $\beta = 1, 2, \ldots$
$$N = 25a^2 + 14a + 2,$$
$$N = 289a^2 + 76a + 5,$$
. . . .

La forme précédente n'était pas connue de l'auteur du *Canon Pellianus*.

NOTE SUR LES SURFACES RÉGLÉES

Par **E. Amigues**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

---

1. — Les équations
$$X = aZ + p$$
$$Y = bZ + q$$
dans lesquelles a, b, p, q sont fonctions d'une variable t, représentent une surface réglée. En laissant ces fonctions arbitraires, on a toutes les surfaces réglées.

Si on donne à t deux valeurs t et $t + dt$ on obtient deux génératrices infiniment voisines.
$$\begin{cases} X = aZ + p \\ Y = bZ + q \end{cases}$$
$$\begin{cases} X = (a + \Delta a)\, z + p + \Delta p \\ Y = (b + \Delta b)\, z + q + \Delta q \end{cases}$$
Δa, Δb, Δp, Δq sont du même ordre que da, db, dp, dq et

par suite que dt, que nous prenons comme infiniment petit principal.

La plus courte distance des deux droites a pour valeur

$$\frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\pm\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}.$$

Il est évident que le dénominateur n'est pas nul et qu'il est du premier ordre.

Quant au numérateur, on peut l'écrire ainsi, en se bornant aux termes du troisième ordre.

$$(da\,dq - db\,dp) + \frac{1}{2}\,d(da\,dq - db\,dp) + \ldots$$

par où l'on voit que ce numérateur est ou du second ordre, ou au moins, du quatrième.

La conclusion est que la plus courte distance est du premier ordre ou au moins du troisième, théorème dû à Bouquet.

Les surfaces pour lesquelles cette plus courte distance est du premier ordre s'appellent surfaces gauches. Les autres, caractérisées par l'identité en t,

$$da\,dq - db\,dp = 0$$

s'appellent développables. Nous ne justifierons pas ici ces dénominations.

2. — Toute surface engendrée par une tangente à une courbe gauche est une surface développable.

Soient

$$x = f(z),$$
$$y = \varphi(z),$$

les équations de la courbe. La tangente en un point x, y, z est représentée par les équations

$$X - f(z) = f'(z)\,[Z - z]$$
$$Y - \varphi(z) = \varphi'(z)\,[Z - z]$$

On a ici

$$a = f'(z) \qquad p = f(z) - zf'(z)$$
$$b = \varphi'(z) \qquad q = \varphi(z) - z\varphi'(z).$$

On conclut de là

$$\frac{dp}{da} = -z,$$

et

$$\frac{dq}{db} = -z;$$

par suite

$$\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db}.$$

3. — Réciproquement, dans toute surface développable, les génératrices sont tangentes à une courbe gauche.

On a, par hypothèse,

$$\frac{dp}{da} = \frac{dq}{db}.$$

Prenons pour variable indépendante la valeur commune de ces deux rapports changée de signe, et désignons cette variable par z. Nous avons dès lors

$$dp = -zda$$
$$dq = -zdb$$

a et b sont deux fonctions de z *qui ont toujours des intégrales.* Nous représenterons ces intégrales par $f(z)$ et $\varphi(z)$.

On a alors

$$\left\{ \begin{aligned} b &= \varphi'(z) \\ a &= f'(z) \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

et, par conséquent,

$$\left\{ \begin{aligned} da &= f''(z)dz \\ db &= \varphi''(z)dz. \end{aligned} \right.$$

Par suite les valeurs de dp et de dq deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} dp &= -zf''(z)dz \\ dq &= -z\varphi''(z)dz, \end{aligned} \right.$$

et, en intégrant,

$$\left\{ \begin{aligned} p &= f(z) - zf'(z) \\ q &= \varphi(z) - z\varphi'(z). \end{aligned} \right. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2), prouvent que la droite variable définie par les équations

$$X = aZ + p,$$
$$Y = bZ + q,$$

représente les tangentes à la courbe dont les équations sont

$$x = f(z),$$
$$y = \varphi(z).$$

Cette réciproque constitue l'intérêt de cette note.

4. — Nous allons maintenant prouver que les surfaces réglées pour lesquelles le plan tangent est le même tout le long d'une génératrice sont les surfaces développables.

Soit une génératrice

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

et une génératrice infiniment voisine

$$x = (a + \Delta a)z + p + \Delta p,$$
$$y = (b + \Delta b)z + q + \Delta q.$$

Si on prend sur ces deux génératrices deux points ayant même z, savoir z_0, on a pour les coordonnées de ces deux points, M et M'

$$\text{M} \begin{cases} x = az_0 + p \\ y = bz_0 + q \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\text{M}' \begin{cases} x = (a + \Delta a)z_0 + p + \Delta p \\ y = (b + \Delta b)z_0 + q + \Delta q \\ z = z_0. \end{cases}$$

Le plan tangent en M contient la génératrice du point M. Son équation est donc de la forme

$$x - az - p + \lambda\,(y - bz - q) = 0.$$

Mais d'après les valeurs des coordonnées de M et M', ces deux points sont infiniment voisins, et par suite le point M' est situé dans le plan tangent en M. On a donc

$$z_0\Delta a + \Delta p + \lambda\,(z_0\Delta b + \Delta q) = 0,$$

d'où on tire

$$\lambda = -\frac{z_0\Delta a + \Delta p}{z_0\Delta b + \Delta q}.$$

Pour que le plan tangent en M soit le même tout le long de la génératrice du point M, il faut et il suffit que cette valeur de λ ne dépende pas de z_0, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\Delta a}{\Delta b} = \frac{\Delta p}{\Delta q},$$

ou, à la limite,

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

En d'autres termes, il est nécessaire et suffisant que la surface soit développable.

UNE PROPRIÉTÉ DES DÉTERMINANTS (*)

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Lyon.

Quand on peut détacher d'un tableau d'éléments un déterminant d'ordre k *qui n'est pas nul si les déterminants d'ordre* k + 1 *qu'on obtient en le bordant avec une ligne et une colonne du tableau sont nuls, tous les déterminants d'ordre* k+ 1 *tirés du tableau sont nuls.*

Lemme. — Si l'on peut satisfaire à n équations linéaires et homogènes contenant $k + p$ inconnues en se donnant arbitrairement p des inconnues le déterminant principal du système est au plus d'ordre k.

Ceci est évident si n est égal ou inférieur à k. Quand n est supérieur à k, admettant pour un instant que le déterminant principal soit d'ordre $k + h$, il en résulterait que les $k + p$ inconnues s'expriment linéairement en fonction de $p - h$ d'entre elles. Les p inconnues qui sont arbitraires seraient fonctions linéaires de $p - h$ variables donc liées entre elles au moins par une relation linéaire, ce qui est absurde, et le lemme est démontré.

Ceci posé, envisageons le tableau d'éléments donné comme correspondant à un système d'équations linéaires et homogènes. Considérant le déterminant d'ordre k qui n'est pas nul, on peut résoudre k d'entre elles par rapport à k des inconnues. Substituant dans celles qui restent, on a des relations linéaires entre les p autres inconnues qui se réduisent, en vertu de l'hypothèse, à des identités puisque les coefficients de ces inconnues (calcul connu) y sont précisément les déterminants obtenus en bordant celui qui n'est pas nul. Donc les p inconnues restantes sont arbitraires, le déterminant principal est d'ordre k, c'est-à-dire que tous les déterminants d'ordre $k + 1$ sont nuls. C. Q. F. D.

(*) Cette propriété est connue; elle a été indiquée par M. Méray.

Application. — On sait que pour qu'un polynôme homogène du second degré soit carré parfait il faut et il suffit que les mineurs du second ordre (à deux lignes et deux colonnes) de son discriminant soient tous nuls. Il résulte de la propriété ci-dessus, un élément au moins de la diagonale étant différent de zéro (ceci est évident *a priori*), qu'il *suffit* que les déterminants du second ordre obtenus en bordant cet élément soient nuls à la fois. Les conditions obtenues sont visiblement distinctes.

REMARQUE. — La propriété ci-dessus peut, dans le cas particulier $k = 1$, employé ici, être établie par un calcul simple.

Soit $a, b, c\ldots$, le tableau donné

$$\begin{matrix} a & b & c\ldots \\ a' & b' & c'\ldots \\ a'' & b'' & c''\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Supposons a différent de zéro. Si l'on multiplie les lignes par a il vient

$$\begin{matrix} a^2 & ab & ac\ldots \\ aa' & ab' & ac'\ldots \\ aa'' & ab'' & ac''\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

qui se change en vertu des hypothèses

$$ab' - ba' = 0 \qquad ac' - ca' = 0,\ldots \text{ en}$$

$$\begin{matrix} a^2 & ab & ac\ldots \\ aa' & ba' & ca'\ldots \\ aa'' & ba'' & ca''\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Il est visible que les déterminants du second ordre déduits d'un pareil tableau sont tous nuls puisque, supprimant les facteurs $a, a'\ldots$ aux diverses lignes, il devient

$$\begin{matrix} a & b & c\ldots \\ a & b & c\ldots \\ a & b & c\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

THÉORÈME D'ALGÈBRE

Par M. **Desplanques**, élève à l'École préparatoire de Sainte-Barbe (classe de M. André).

M. Lucien Lévy, dans une note sur la possibilité de l'équilibre électrique, insérée dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences (année 1881), énonce le théorème suivant :

Si tous les éléments d'un déterminant sont positifs, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont négatifs et plus grands en valeur absolue que la somme des éléments de la ligne qui les contient, ce déterminant n'est jamais nul.

Cette proposition est susceptible de généralisation :

Si dans un déterminant, chaque élément de la diagonale principale est plus grand en valeur absolue que la somme des valeurs absolues des autres éléments de la même ligne, ce déterminant n'est jamais nul.

Soit le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_{11} u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

dans lequel

$$\text{val. abs. } u_{11} > \text{val. abs. } u_{12} + \text{val. abs. } u_{13} + \dots + \text{val. abs. } u_{1n}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{val. abs. } u_{pp} > \text{val. abs. } u_{p1} + \text{val. abs. } u_{p2} + \dots + \text{val. abs. } u_{pn}$$

Supposons que les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots u_{1n}x_n = 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \dots u_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{p1}x_1 + u_{p2}x_2 + \dots u_{pn}x_n = 0 \\ u_{n1}x_1 + u_{n2}x_2 + \dots u_{nn}x_n = 0 \end{array}\right. \quad (A)$$

admettent une solution en nombres finis $x'_1 x'_2 \dots x'_n$, qui ne soient pas tous nuls

Choisissons parmi les nombres $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ le plus grand en valeur absolue, soit x'_p ce nombre, nous avons :

$$u_{p1}x'_1 + u_{p2}x'_2 + \dots + u_{pp}x'_p + \dots + u_{pn}x'_n = 0$$

ou

$$u_{p1}\frac{x'_1}{x'_p} + u_{p2}\frac{x'_2}{x'_p} + \dots + u_{pp} + \dots + u_{pn}\frac{x'_n}{x'_p} = 0. \quad (1)$$

Les nombres $\frac{x'_1}{x'_p}$, $\frac{x'_2}{x'_p} \dots \frac{x'_n}{x'_p}$, sont tous plus petits que 1 en valeur absolue.

D'autre part, l'on a :

$$\text{val. abs. } u_{pp} < \text{val. abs. } u_{p1} + \dots + \text{val. abs. } u_{pn},$$

l'égalité (1) est donc impossible.

Le système des équations (A) n'admet aucune solution en nombres finis différents de zéro, le déterminant proposé n'est donc pas nul.

Remarque. — La démonstration de M. Desplanques peut être complétée par la remarque suivante.

Soit k le nombre des éléments négatifs de la diagonale principale; le déterminant proposé aura le signe de $(-1)^k$.

En effet, si l'on fait tendre vers zéro tous les éléments sauf ceux de la diagonale principale, le déterminant conserve la propriété qui le définit et ne peut s'annuler. Il conserve donc son signe qui est celui du produit des éléments de la diagonale principale (L. L).

CONCOURS D'AGRÉGATION 1886

Solution par M. A. Fleurot à Marseille.

Étant donnés dans un plan une droite D, *un point* O *sur cette droite, et une droite* D' :

1° Former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D *au point* O *et qui ont la droite* D' *pour directrice;*

2° Démontrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P *du plan; déterminer les régions du plan où doit se*

trouver le point P *pour que ces deux courbes soient réelles, et, dans ce cas, en reconnaître le genre.*

3° Les deux coniques du faisceau considéré qui passent par le point P *se coupent en outre en un point* P'; *calculer les coordonnées du point* P' *en fonction de celles du point P, et, en supposant que le point P décrive une ligne* C, *trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point* P' *décrive la même ligne.*

1° Prenons pour axe des x la droite D, pour axe des y la perpendiculaire menée par O à cette droite, et désignons par a et b l'abscisse et l'ordonnée à l'origine de la droite D' L'équation générale des coniques est alors de la forme :

$$\mu^2[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = (bx + ay - ab]^2.$$

Exprimant que ces coniques passent en O et y sont tangentes à Ox, nous avons :

$$\mu^2(\alpha^2 + \beta^2) - a^2b^2 = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha\mu^2 - ab^2 = 0. \qquad (2)$$

Entre ces deux équations on pourrait éliminer α, qui doit disparaître de l'équation et tirer une des deux quantités μ^2, β, en fonction de l'autre, par une équation du 2me degré ; mais, pour avoir une équation générale où le paramètre variable entre rationnellement, il est préférable de remarquer que. β n'entrant plus que dans le coefficient du terme en y, lequel est $-2(\beta\mu^2 - a^2b)$, on peut regarder $\beta\mu^2$, ou mieux encore ce coefficient tout entier, comme un paramètre variable, et poser $\beta\mu^2 - a^2b = \lambda ab$ (3). Éliminant alors α et β entre (1), (2) et (3), il vient :

$$\mu^2 = (\lambda + a)^2 + b^2,$$

et l'équation générale cherchée est :

$$(\lambda + a)^2x^2 - 2abxy + (\lambda^2 + 2a\lambda + b^2)y^2 - 2ab\lambda y = 0.$$

2° Écrivons que cette équation est vérifiée par les coordonnées x_0y_0 d'un point P; le résultat, ordonné en λ, est :

$$\lambda^2(x_0^2 + y_0^2) + 2\lambda a(x_0^2 + y_0^2 - by_0) + (ax_0 - by_0)^2 = 0. \text{ (A)}$$

Cette équation donne pour λ deux valeurs, définissant deux coniques de la famille. Pour que ces coniques soient réelles, il faut que leurs équations soient à coefficient réels, et cela suffit, puisqu'elles coupent Ox en des points réels.

La condition de réalité est donc :

$$y_0 \{(x_0^2 + y_0^2)[2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0 - 2a^2b] + a^2b^2y_0\} > 0.$$

Les lignes séparatrices des régions où doit se trouver le point P pour que les deux coniques passant par ce point soient réelles, sont donc l'axe des x, et la cubique représentée par l'équation

$$(x^2 + y^2)[2abx + (a^2 - b^2)y - 2a^2b] + a^2b^2y = 0$$

(enveloppe des coniques).

C'est une cubique circulaire unicursale Γ, du genre des strophoïdes obliques. Son point double est le pied de la perpendiculaire OH abaissée de O sur D′. L'asymptote qui a pour équation : $2abx + (a^2 - b^2)y - 2a^2b = 0$, coupe Ox en A. La cubique passe aussi en A et est tangente en O à Ox. Elle coupe Oy en deux autres points, C, D, toujours réels; la somme des coordonnées de ces points est égale à l'ordonnée à l'origine OI de l'asymptote. On voit facilement que, si $a > b$, le point B sépare les deux points C, D; si $a = b$, l'un des points va à l'infini, car l'asymptote est alors parallèle à Oy; si $a < b$, c'est le point O qui sépare C et D. Dans les deux cas extrêmes, ID = OC. — Ces deux cas sont complètement analogues : l'asymptote ne fait que tourner de 180° autour du point A. Il est à remarquer, pour la construction, qu'elle fait toujours avec Ox un angle plus grand que OH. Nous nous sommes borné à tracer des figures qui correspondent au cas $a < b$. La distinction des régions donnant des coniques réelles se fait d'ailleurs facilement.

Le discriminant $AC - B^2$ de la conique λ se réduit à $\lambda(\lambda + 2a)$. Il ne peut changer de signe que si λ passe par les valeurs zéro et $-2a$, c'est-à-dire lorsque le point P traverse l'une des deux paraboles :

$$(ax - by)^2 = 0,$$
$$(ax - by)^2 + 4a^2by = 0,$$

qui sont les seules paraboles de la famille considérée. Ces deux paraboles, avec les lignes trouvées plus haut pour exprimer la réalité de λ, c'est-à-dire l'axe des x et la cubique Γ, divisent le plan en régions telles, que, tant que le point P reste dans la même région, aucune des deux valeurs de λ ne peut fournir une parabole; ni, par suite, faire changer le genre

de l'une ou l'autre conique. La première parabole n'est autre que la droite double OH, qui d'ailleurs, en sa qualité de droite double, n'est pas en réalité une ligne séparatrice. La deuxième parabole P est naturellement tangente en O à ox, et aussi tangente à $x = a$. Cherchons ses points d'intersection autres que O, avec la cubique Γ. L'équation aux coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection des deux courbes est, après la suppression de la racine double $m = 0$:

$$(4a^2 - b^2)^2m^4 + 4ab(4a^2 - b^2)m^3 + 2a^2(12a^2 - b^2)m^2 + 12a^3bm + 9a^4 = 0.$$

Comme la parabole est tangente à son enveloppe en chacun de ses points d'intersection avec celle-ci, l'équation précédente est de la forme : $(m - t_1)^2(m - t_2)^2 = 0$, et l'on trouve facilement que t_1 et t_2 sont les racines de l'équation :

$$(4a^2 - b^2)t^2 + 2abt + 3a^2 = 0,$$

et la condition de réalité de ces racines est $b - a\sqrt{3} > 0$. Ainsi; si $b < a\sqrt{3}$, les deux points de contact sont imaginaires; si $b = a\sqrt{3}$, ils sont confondus en un point situé entre L et T; si $b > a\sqrt{3}$, ils sont réels, tous deux entre L et T si $b < 2a$, séparés par L, si $b > 2a$; si $b = 2a$, l'un est le point L, et l'autre est sur l'arc LT.

Nous avons donc trois cas principaux à distinguer dans la discussion du genre des coniques : $b < a\sqrt{3}$, $b = a\sqrt{3}$, $b > a\sqrt{3}$.

Les régions une fois bien limitées, dans chaque cas, comme on est sûr que, par tous les points de la même région, il passe le même nombre d'ellipses et le même nombre d'hyperboles, il suffit d'étudier, dans chaque région, un point commode.

Premier Cas, $b < a\sqrt{3}$. — Si dans l'équation (A) on fait $x_0 = \pm\infty$, et y_0 *fini*, l'équation devient $(\lambda + a)^2 = 0$. Ces deux valeurs de λ rendent le discriminant négatif, et cela, quel que soit le signe de y_0 : donc, tous les points de la région MHAx, comme tous ceux de la région ROx' donnent deux hyperboles. Si l'on fait $x_0 = 0$, $y_0 = -\varepsilon$, les substitutions de $-\infty$, $-2a$, 0, donnent des signes alternés : donc, par tous

les points de l'intérieur de la parabole passent une ellipse et une hyperbole. En faisant $x_0 = 0$, $y_0 = + \varepsilon$, on a deux racines positives : donc, tous les points intérieurs à la boucle OCH donnent deux ellipses. Enfin l'hypothèse $x_0 = a$, $y_0 = - \varepsilon$ montre que dans la région STOAN on a deux hyperboles.

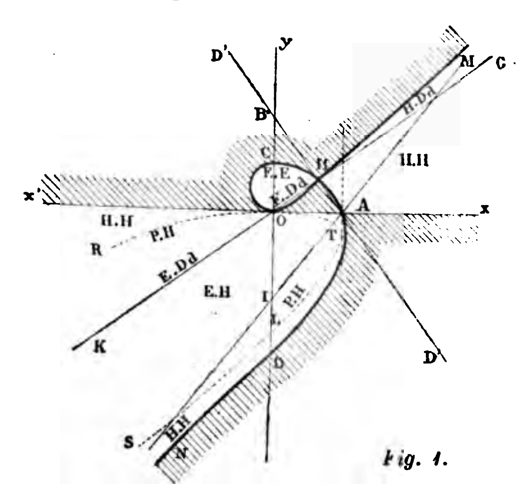
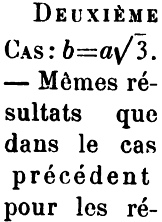


Fig. 1.

Tous les points de la parabole P donnent cette parabole et une hyperbole; la portion de droite HG fournit cette droite double et une hyperbole; la portion HK, cette droite double et une ellipse. — La figure est faite dans l'hypothèse $b > a$.



DEUXIÈME CAS : $b = a\sqrt{3}$. — Mêmes résultats que dans le cas précédent pour les régions au-dessus de Ox, pour la région ROx', et pour l'inté-

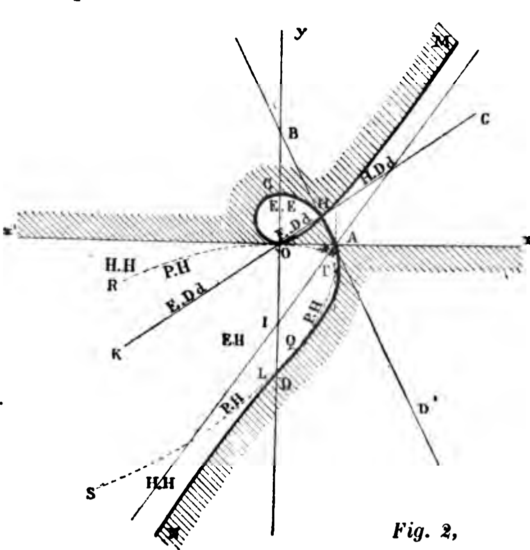


Fig. 2,

rieur de la parabole. L'hypothèse $x = a$ $y = -\varepsilon$ donne deux hyperboles pour la région OTQA, la parabole P et une hyperbole pour l'arc OTQ de cette parabole. Si le point P est en L, on a une parabole et une hyperbole : l'arc de parabole QS donne donc, outre cette parabole, une hyperbole; par suite, dans la région SQN, on a deux hyperboles.

Troisième Cas : $b > a\sqrt{3}$. — Résultats identiques à ceux des deux premiers cas, pour les régions au-dessus de Ox, pour la région ROx', et pour l'intérieur de la parabole. On trouve encore deux hyperboles pour la région OTQA. Donc, l'arc de parabole OQ donne une hyperbole ; au point Q, cette hyperbole devient ellipse ; donc, dans la région QLQ' on a deux ellipses ; dans la région SQ'N, on a de même deux hyperboles. — La figure est faite dans l'hypotèse $b > 2a$.

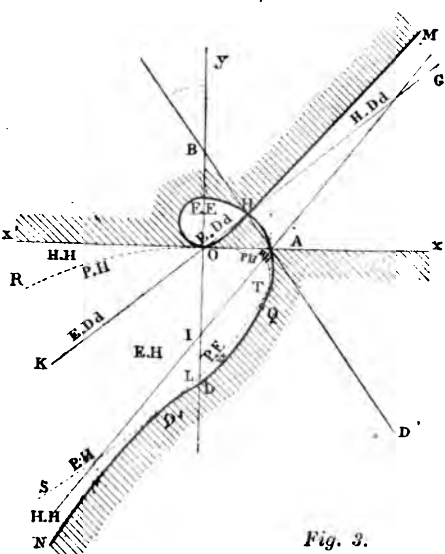


Fig. 3.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMEN

1. — *Asymptotes de la courbe qui, en coordonnées polaires, correspond à l'équation*

$$\frac{1}{\rho} = (\omega - \alpha)(\omega - \beta) \ldots (\omega - \lambda).$$

L'équation de l'asymptote (C. M. S.; II, p. 580) est

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right)' \sin(\omega - \alpha).$$

Nous avons ici

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \Sigma\,(\omega - \beta) \ldots (\omega - \lambda).$$

Les équations demandées sont donc

$$\frac{1}{\rho} = (\alpha - \beta) \ldots (\alpha - \lambda) \sin(\omega - \alpha)$$

$$\frac{1}{\rho} = (\beta - \alpha) \ldots (\beta - \lambda) \sin(\omega - \beta)$$

. . . .

2. — ***Les coniques* γ *qui passent par trois points fixes et qui sont conjuguées à un segment* AB, *passent par un quatrième point fixe.***

Prenons AB pour axe des x, et le milieu de AB pour origine.

L'équation générale des coniques γ est, comme l'on sait,

$$\frac{\lambda}{ax + by + c} + \frac{\mu}{a'x + b'y + c'} + \frac{1}{a''x + b''y + c''} = 0.$$

En faisant $y = 0$, et en exprimant que l'équation

$$x^2(\lambda a'a'' + \mu aa'' + aa') + \ldots + \lambda c'c'' + \mu cc'' + cc' = 0,$$

a deux racines dont le produit est égal à $\frac{\overline{AB}^2}{4}$, on obtient, entre λ et μ, une relation linéaire; donc, etc.

3 (*). — *La série*

$$\frac{1}{2(l2)^p} + \frac{1}{3(l3)^p} \quad \ldots \quad + \frac{1}{n(ln)^p} \quad \ldots$$

est convergente si l'on suppose $p > 1$.

Considérons l'intégrale y,

$$y = \int_2^\infty \frac{dx}{x(lx)^p}.$$

En posant

$$lx = u,$$

nous avons

$$\int \frac{dx}{x(lx)^p} = \int \frac{du}{u^p} = K + \frac{1}{(-u1\,p^{\;p-1}}.$$

D'après cela, et en vertu d'un théorème connu, la série est convergente si nous supposons $p > 1$, parce que l'intégrale $\int_2^{\infty}$ est une quantité finie.

Pour $p = 1$, cette intégrale est infinie; la série est divergente; on retrouve alors la série de M. Bertrand que nous avons signalée précédemment (Journal, 1886, p. 163).

Le théorème auquel nous venons de faire allusion correspond à l'énoncé suivant.

Si f(x) *désigne une fonction continue et bien déterminée lorsque* x *varie de* α *à* $+\infty$, *et si l'on a :* $\lim f(x) = 0$, *pour* $x = \infty$, *la série :*

$$f(k),\quad f(k+1)\quad \ldots\quad f(n),\quad \ldots$$

est convergente, si l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx,$$

est une quantité finie; elle est divergente, dans le cas contraire. (Le nombre K *désigne un entier quelconque supérieur à* α.*)*

A suivre.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Roux, *élève au lycée de Grenoble.*

... Je désire aussi vous exposer un procédé permettant de déterminer le point de contact des tangentes aux courbes que vous étudiez dans le numéro de Septembre dernier de ce journal. Ces courbes sont les enveloppes de droites telles que si, par les points de rencontre de ces droites avec les axes, on mène des parallèles à ces axes, le lieu du point d'intersection de ces parallèles est une courbe donnée.

Cette méthode, sans être plus simple que celle que vous avez donnée, a l'avantage de s'appliquer lorsque les axes

sont quelconques; de plus, on la tire immédiatement du principe des transversales réciproques.

Pour cela, je m'appuierai sur la remarque suivante qu'il suffit d'énoncer.

Étant donnés deux axes quelconques Ox, Oy *et une droite* AB, *si d'un point* N *de cette droite, nous menons des parallèles aux axes qu'elles rencontrent en* Q, R: *le milieu des droites* QR, *quand* N *se déplace, est une droite.*

Soient N_1, N_1 deux points infiniment voisins sur une droite AB, et soient RQ, R_1Q_1 les droites correspondantes que vous considérez dans l'article cité. Prenons en A_1 et B_1 les milieux de OA et de OB et prenons

$MS = 2M\omega$, $MS_1 = 2M\omega_1$.

La droite SS_1 est parallèle à A_1B_1 : de plus dans le triangle MSS_1 les deux droites RR_1, QQ_1 sont deux transversales réciproques : donc

$$S_1T_1 = ST.$$

Passons à la limite *(fig. 2)* :

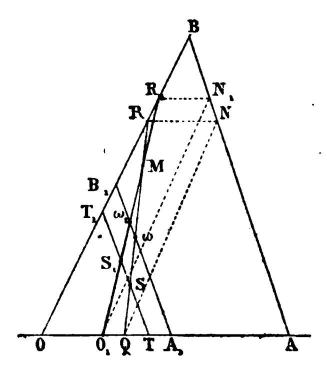


Fig. 1.

Le point S étant situé sur une droite parallèle à AB et divisant en deux parties égales cette droite, est sur la médiane OK du triangle OAB : il est donc à l'intersection des deux droites RQ, ON : si ω est le milieu de RQ; on n'aura qu'à porter $M\omega = \omega S$:

M est le point cherché.

NOTE. — La démonstration très simple que nous communique notre jeune correspondant conduit, comme il est facile de le vérifier, à la construction qu'a donnée M. d'Ocagne (*J. M. E.*, 1885, p. 30 et *J. M. S.*, 1886, p. 256).

Le quadrilatère ABPQ et la transversale OIK) en observant que AK = BK) donnent

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{OQ}{OA} \cdot \frac{OB}{OP}.$$

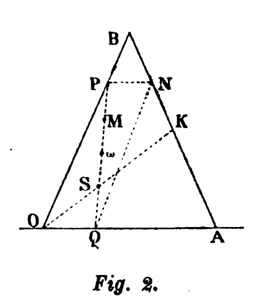


Fig. 2.

Mais on a

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{BN}{BA}, \qquad \frac{OB}{OP} = \frac{BA}{AN}$$

et, par conséquent,

$$\frac{SQ}{SP} = \frac{BN}{AN}.$$

Si l'on prend sur PQ le point M, isotomique de S, on a donc

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{NB}{NA};$$

c'est la relation indiquée par M. d'Ocagne.

G. L.

QUESTION 92

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On donne une circonférence O *et une droite fixes* AB. *Sur chaque tangente à la circonférence on prend le point* M, *de telle sorte que le point de contact* P *soit le milieu du segment* QM *limité d'un côté au point* M, *et de l'autre côté sur la droite fixe* AB. *Quel est le lieu du point* M*? On examinera en particulier le cas où la droite* AB *est tangente à la circonférence, et le cas particulier où la droite* AB *est un diamètre de la circonférence.*

Prenons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle dont l'un soit perpendiculaire à AB. Soit $x = d$ l'équation de la droite AB. Désignons par R le rayon du cercle; R $\cos \varphi$ et R $\sin \varphi$ seront les coordonnées d'un point variable du cercle. L'équation de la tangente en ce point au cercle est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = o.$$

L'ordonnée du point Q de rencontre de cette tangente avec AB est $\dfrac{R - d \cos \varphi}{\sin \varphi}$. On a donc en désignant par $x_0 y_0$ les coordonnées du point M, et en exprimant que le point

P est le milieu de QM,

$$y_0 + \frac{R - d\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2R\sin\varphi. \qquad (1)$$

De plus, le point M étant sur la tangente du cercle, on a

$$x_0 \cos\varphi + y \sin\varphi - R = 0. \qquad (2)$$

On aura l'équation du lieu en éliminant φ entre les deux équations (1) et (2).

L'équation (2) donne

$$y_0 \sin\varphi = R - x_0 \cos\varphi.$$

En portant cette valeur dans (1), il vient

$$2R\cos\varphi = x_0 + d.$$

L'élimination de φ est dès lors immédiate et l'on obtient en renplacant x_0 par x, y_0 par y_1

$$(x^2 + dx - 2R^2)^2 = 4R^2y^2 - y^2(x + d)^2.$$

Cette équation peut s'écrire aussi :

$$(x^2 + y^2)[x + d - 2R][x + d + 2R] = 4R^2(dx - R^2).$$

Propriétés générales de la courbe. — Cette équation représente une courbe du quatrième degré passant par les ombilics du plan, et ayant deux asymptotes réelles parallèles à oy. Elle est symétrique par rapport à ox. Elle est bitangente au cercle donné aux points de rencontre de ce cercle avec la droite AB.

1° $d > R$. — La droite AB ne rencontre pas le cercle. Il en est donc de même de la courbe, qui a dans ce cas la forme générale indiquée par la figure (1).

2° $d = R$. — La droite AB est tangente au cercle. Il en est donc de même de la courbe.

Dans ce cas, le lieu se décompose en la droite AB et en la courbe du troisième degré

$$(x^2 + y^2)(x + 3R) = 4R^3.$$

Cette courbe a la forme indiquée par la figure (2).

3° $d < R$. — La courbe est alors bitangente au cercle en deux points réels, figure (3).

4° $d = 0$. — Ce cas n'est qu'un cas particulier du précédent. La courbe a deux axes de symétrie qui sont ox et oy.

Nota. — Autres solutions par MM. Ferval, élève du lycée Henri IV (classe de M Macé de Lépinay); G. Sequestre à Angoulême; A. Bêche professeur à l'école normale de Tulle.

QUESTIONS PROPOSÉES

215. — n étant impair, le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, n à n, augmenté de dix fois le nombre des combinaisons de $2n - 2$ lettres, $n - 1$ à $n - 1$, est divisible par $n + 2$.

Autrement dit :

$$C_{2n,\,n} + 10\, C_{2n-2,\,n-1} = \mathfrak{M}(n + 2). \qquad (n \text{ impair}).$$

(Catalan.)

216. — Etant donnée une ellipse, on peut adjoindre à tout point f du segment FF′ des foyers une droite d extérieure au plan de la courbe et parallèle au petit axe, telle qu'il existe un rapport constant entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au point f et à la droite d. La droite d engendre un cylindre dont la section droite est une courbe semblable à l'ellipse donnée.

Trouver le théorème analogue pour l'hyperbole et la parabole.

(J. Neuberg.)

217. — Soient S le sommet d'un cône droit, O le point où l'axe rencontre un plan quelconque P. Démontrer qu'il existe un rapport constant entre les distances des points O et S à une tangente quelconque de la section du cône par le plan P. *(J. Neuberg.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 27208-6.

SUR LES FOCALES D'UNE SURFACE

DU SECOND ORDRE

CIRCONSCRITE A UNE QUADRIQUE DONNÉE

Par M. **V. Hioux**, professeur au lycée de Nantes.

---

1. — Prenons, comme quadrique donnée, un ellipsoïde

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Soit $M(x_1, y_1, z_1)$ le pôle d'un plan

$$P = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale d'une surface du second ordre circonscrite à (E) peut s'écrire :

$$\varphi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - KP^2 = 0.$$

A chaque valeur de K correspond une surface particulière.

Soit maintenant $S = 0$ l'équation d'une sphère de rayon nul ayant son centre au point (α, β, γ) on aura

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0.$$

Formons l'équation

$$\varphi + \lambda S = 0$$

et exprimons qu'elle représente un système de deux plans.

Cette dernière équation peut s'écrire :

$$\left(\frac{1}{a^2} + \lambda\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2} + \lambda\right)y^2 + \left(\frac{1}{c^2} + \lambda\right)z^2 - 2\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$
$$+ \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 1 - KP^2 = 0.$$

Supposons la rendue homogène par l'introduction d'une quatrième variable $t = 1$. Les demi-dérivées partielles peuvent s'écrire

$$x = \frac{a^2\alpha\lambda}{1 + a^2\lambda} + \frac{KPx_1}{1 + a^2\lambda},$$
$$y = \frac{b^2\beta\lambda}{1 + b^2\lambda} + \frac{KPy_1}{1 + b^2\lambda},$$

$$z = \frac{c^2\gamma\lambda}{1 + c^2\lambda} + \frac{KPz_1}{1 + c^2\lambda},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \frac{1}{\lambda} = \alpha x + \beta y + \gamma z - \frac{KP}{\lambda}.$$

Faisons la somme des trois premières multipliées respectivement par $\frac{x_1}{a^2}$, $\frac{y_1}{b^2}$, $\frac{z_1}{c^2}$: nous obtenons, en tenant compte de l'expression de P,

$$P + 1 = \lambda\left(\frac{\alpha x_1}{1 + a^2\lambda} + \frac{\beta y_1}{1 + b^2\lambda} + \frac{\gamma z_1}{1 + c^2\lambda}\right)$$
$$+ KP\left(\frac{x_1^2}{a^2(1 + a^2\lambda)} + \frac{y_1^2}{b^2(1 + b^2\lambda)} + \frac{z_1^2}{c^2(1 + c^2\lambda)}\right).$$

Les coordonnées x, y et z du centre doivent admettre une infinité de valeurs; il en est par suite de même de la fonction entière P des mêmes variables. Or la dernière équation est du premier degré par rapport à P et comme elle doit être satisfaite pour plus d'une valeur de P, le coefficient ne P doit être nul ainsi que le terme indépendant. On a donc d'abord les deux conditions.

$$\frac{x_1^2}{a^2(1 + a^2\lambda)} + \frac{y_1^2}{b^2(1 + b^2\lambda)} + \frac{z_1^2}{c^2(1 + c^2\lambda)} - \frac{1}{K} = 0.$$

$$\frac{\alpha x_1}{1 + a^2\lambda} + \frac{\beta y_1}{2 + b^2\lambda} + \frac{\gamma z_1}{1 + c^2} - \frac{1}{\lambda} = 0$$

Portons maintenant les valeurs de x, y et z dans la quatrième dérivée et, en vertu de la deuxième condition nous obtenons :

$$\frac{\alpha^2}{1 + a^2\lambda} + \frac{\beta^2}{1 + b^2\lambda} + \frac{\gamma^2}{1 + c^2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Telles sont les trois conditions qui doivent être remplies pour que l'équation $\varphi + \lambda S = 0$ représente deux plans qui se coupent.

Ces trois conditions peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{\frac{x_1^2}{a^2}}{1 + a^2\lambda} + \frac{\frac{y_1^2}{b^2}}{1 + b^2\lambda} + \frac{\frac{z_1^2}{c^2}}{1 + c^2\lambda} - \frac{1}{K} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\beta y_1}{b^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\gamma z_1}{c^2+\frac{1}{\lambda}}-1=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\beta^2}{b^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{\gamma^2}{c^2+\frac{1}{\lambda}}-1=0. \qquad (3)$$

L'équation (1) est du troisième degré en λ et admet trois racines réelles. A chacune d'elles correspond une focale qui est l'intersection de la surface (3) par le plan (2) qui est le plan polaire du pôle du plan P par rapport à la surface (3).

Or cette surface (3) est homofocale à la surface donnée (E).

On a par conséquent ce théorème :

Théorème. — *Quand une surface du second ordre est circonscrite à une quadrique* (E) *ses focales sont situées sur trois surfaces* (A) *homofocales à* (E) *dans des plans qui ont un pôle commun qui est le pôle du plan de la courbe* (C) *de contact de la surface considérée avec la quadrique donnée.*

2. — Cas particuliers du cône circonscrit. — Lorsque la surface circonscrite

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-KP^2=0,$$

représente un cône, on a

$$K=\frac{1}{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1}.$$

Portons cette valeur de K dans la première condition ; alors après des réductions faciles elle devient

$$\frac{x_1^2}{a^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{y_1^2}{b^2+\frac{1}{\lambda}}+\frac{z_1^2}{c^2+\frac{1}{\lambda}}-\ =0. \qquad (4)$$

On voit ainsi que l'équation (3) de la surface (A) est vérifiée par les coordonnées du sommet du cône circonscrit, ce qui était évident *a priori* pour ce cas particulier. Le plan (2) est maintenant le plan tangent à la surface (3) menée par le sommet du cône. Pour chacune des valeurs réelles de

$\frac{1}{\lambda}$ fournies par l'équation (4) l'équation (3) représente une surface homofocale à (E) passant par le sommet du cône.

On a donc, comme cas particulier du théorème précédent, le théorème connu donné par Chasles :

« Les focales d'un cône circonscrit à une surface du second ordre sont les génératrices des surfaces homofocales à la proposée et passant par le sommet du cône. »

Remarque. — Les équations (2), (3) et (4) restent les mêmes quand on change α, β, γ en x_1, y_1, z_1 et réciproquement; les focales du cône de sommet α, β, γ circonscrit à (E) sont donc représentées par l'ensemble des équations (2) et (4) pour chaque valeur de $\frac{1}{\lambda}$ tirée de l'équation (3). On a donc encore ce théorème :

Le lieu des sommets des cônes circonscrits à une quadrique et ayant pour foyer un point donné s, *est formé des focales du cône circonscrit de sommet* s.

(A suivre.)

QUELQUES QUESTIONS

RELATIVES A L'ÉTUDE DES POINTS INVERSES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Le colonel Mathieu qui a, le premier je crois, considéré les points inverses (voir *Nouv. Annales* 1865, p. 398 et suiv.) appelle ainsi deux points tels que si les coordonnées normales de l'un sont α, β, γ les coordonnées de l'autre sont $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$. M. Neuberg (voir *Mémoire sur le tétraèdre*, page 10; extrait du tome XXXVII des mémoires couronnés et autres publiés par l'Académie royale de Belgique 1884) revient sur cette importante notion et, d'une de leurs principales propriétés géométriques, les appelle *points conjugués isogonaux :*

comme ils ont un très grand rôle dans les questions nouvelles de la géométrie du triangle que l'étude des points de Lemoine et de Brocard a suscitées je compte intéresser les lecteurs avec les théorèmes et les problèmes qui font l'objet de ce petit travail.

1. — *Trouver les coniques qui ont pour inverse une conique.*

(*a*) Nous dirons que deux courbes sont inverses l'une de l'autre, si l'une est le lieu des points inverses de l'autre. Une conique (C) a en général pour inverse (C′) une courbe du 4[me] ordre. Si (C) passe par un des sommets du triangle de référence, (C′) se compose du côté opposé et d'une courbe du 3[me] ordre; si *dans ce cas* (C) se compose de deux droites, cette courbe du 3[me] ordre se décompose en une droite passant par ce sommet et en une conique circonscrite au triangle de référence. Si (C) se compose de deux droites passant par un sommet, (C′) se compose du côté opposé comme droite double et de deux droites passant par ce sommet.

(*b*) Si (C) passe par deux sommets du triangle de référence, (C′) se compose des deux côtés du triangle de référence qui aboutissent au 3[e] sommet et d'une conique (C).

Si, *dans ce cas*, (C) se compose de deux droites, C′ est aussi formée de deux droites passant par les mêmes sommets que (C).

(*c*) Si (C) passe par les trois sommets du triangle de référence, (C′) se compose des trois côtés de ce triangle et d'une autre droite.

2. — *Trouver les coniques qui sont à elles-mêmes leur propre inverse* (*).

Soit $A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + A'\beta\gamma + B'\alpha\gamma + C'\alpha\beta = 0,$

(*) On peut ramener immédiatement cette question à la suivante : *Si* $f(x.y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F,$ *est une fonction de* x *et de* y *telle que pour toute valeur de* x *et de* y *qui annule* f(x,y) *on ait aussi* $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right) = 0$, *on aura*

$$A = 0 \quad C = 0, \text{ et : soit } \begin{cases} F = B \\ E = D \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} F = -B \\ E = -D \end{cases}$$

l'équation d'une de ces coniques; nous ne pouvons supposer à la fois :

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$

car alors la courbe inverse serait une droite; etc.

L'une au moins de ces quantités n'est donc pas nulle, soit C celle-là, la courbe inverse sera représentée par .

$$(A\beta^2 + B\alpha^2)\gamma^2 + \alpha\beta(C\alpha\beta + A'\alpha\gamma + B'\beta\gamma + C'\gamma^2) = 0.$$

Il faut par suite que l'on ait : $A = 0 \quad B = 0.$

La courbe représentée par la seconde parenthèse se transformera alors en elle-même lorsque l'on aura $C = C'$ et $A = B'$ ou lorsque $C = -C'$ et $A = -B'$.

Il résulte de là, et du § 1, que les seules coniques qui soient à elles-mêmes leur inverse ont pour équations :

$$(B\beta + C\gamma)(B\gamma + C\beta) = 0,$$
$$(C\gamma + A\alpha)(C\alpha + A\gamma) = 0,$$
$$(A\alpha + B\beta)(A\beta + B\alpha) = 0,$$

qui représentent des droites symétriques par rapport aux bissectrices, ou :

$$A\alpha^2 \pm A\beta\gamma \pm B\alpha\gamma + B\alpha\beta = 0 \qquad (1)$$
$$A\beta^2 + B\beta\gamma \pm A\alpha\gamma \pm B\alpha\beta = 0 \qquad (2)$$
$$A\gamma^2 \pm B\beta\gamma + B\alpha\gamma \pm A\alpha\beta = 0 \qquad (3)$$

dans lesquelles il faut prendre, en même temps, les signes supérieurs; ou, en même temps, les signes inférieurs.

Si l'on prend le signe +, chacune des trois coniques (1), (2), (3) passe par deux sommets et par les centres des cercles ex-inscrits tangents aux côtés qui aboutissent au sommet par lequel ne passe pas la conique.

Si l'on prend le signe —, chacune d'elles passe par deux sommets, par le centre du cercle inscrit et par le centre du cercle ex-inscrit tangent au côté par les extrémités duquel passe la conique.

3. — *Trouver les cercles qui sont à eux-mêmes leur propre inverse.*

Ce qui précède suffit pour montrer que si O, O_a, O_b; O_c sont respectivement le centre du cercle inscrit et les centres des cercles ex-inscrits au triangle de référence,

Les six cercles décrits sur OO_a, OO_b, OO_c, O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b

comme diamètres sont à eux-mêmes leur propre inverse et sont les seuls cercles du plan jouissant de cette propriété.

Remarquons encore que :

Si la ligne FF′ *qui joint deux points inverses* F *et* F′ *est vue des deux sommets* A *et* B *sous un angle droit et que* γ *soit l'angle* FCF′, *on aura*

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c(a+b)}{2p(p-c)},$$

Si alors

$$a + b = c\sqrt{3}, \qquad \gamma = 60^\circ.$$

4. — *Trouver la condition pour qu'une droite donnée coupe la conique inverse en des points réels.*

Soit $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$ l'équation de la droite donnée.

La conique inverse sera représentée par

$$\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} = 0$$

d'où

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-(A^2 + B^2 - C^2) \pm \sqrt{A^4 + B^4 + C^4 - 2B^2C^2 - 2A^2C^2 - 2A^2B^2}}{2AB}$$

donc :

Une droite coupe ou ne coupe pas la conique, son inverse, suivant que l'on ne peut pas, ou que l'on peut, former un triangle avec les trois quantités A, B, C *prises positivement. On trouve facilement aussi que :*

Pour que la conique inverse d'une droite soit une ellipse, une parabole ou une hyperbole, il faut que la droite ne coupe pas le cercle circonscrit, qu'elle le touche ou qu'elle le coupe.

Cela résulte immédiatement de ce que l'inverse d'un point du cercle circonscrit est à l'infini.

On voit encore :

Qu'une droite est tangente à la conique inverse si elle passe par le centre d'un des quatre cercles tangents aux trois côtes du triangle; ce centre est le point de contact.

(A suivre.)

CONCOURS D'AGRÉGATION 1886

Solution par M. A. FLEUROT à Marseille.

(*Suite et fin*, voir p. 13.)

3. — Soient $x_0 y_0$ les coordonnées de P, xy celles de P'. Soient $\lambda_1 \lambda_2$ les valeurs de λ correspondant aux deux coniques passant par P. L'équation aux coefficients angulaires des droites joignent O aux points d'intersection des deux coniques $\lambda_1 \lambda_2$, est. après la suppression de la racine double $m = 0$:

$$(a - bm)^2 - \lambda_1 \lambda_2 (1 + m^2) = 0.$$

Cette équation du 2e degré a pour racines $\frac{y_0}{x_0}$ et $\frac{y}{x}$. Divisant le produit des racines par $\frac{y_0}{x_0}$ et remplaçant $\lambda_1 \lambda_2$ par se valeur, nous avons :

$$\frac{y}{x} = \frac{2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0}{2aby_0 - (a^2 - b^2)x_0}. \qquad (\alpha)$$

Il nous faut une deuxième équation entre x, y, x_0, y_0. Pour la trouver soit $ux + vy - 1 = 0$ l'équation de la droite PP'.

Cherchons à déterminer les coefficients u et v de cette droite. Pour cela cherchons son intersection avec la conique dont l'équation s'obtient en retranchant membre à membre celle des deux coniques $\lambda_1 \lambda_2$, et qui, par suite, joue le même rôle par rapport aux deux : l'éqnation de cette conique est :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(x^2 + y^2) + 2a(x^2 + y^2 - by) = 0.$$

Le produit des coefficients angulaires des droites joignant l'origine aux points d'intersection de cette conique et de la droite PP' est $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 2a}{(\lambda_1 + \lambda_2) + 2a(1 - bv)}$. Divisant par $\frac{y_0}{x_0}$, et remplaçant $\lambda_1 + \lambda_2$ par sa valeur, il vient :

$$\frac{y}{x} = \frac{x_0 y_0}{y_0[y_0 - v(x_0^2 + y_0^2)]}. \qquad (\beta)$$

Égalant (α) et (β), nous avons :

$$v = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 - b^2)y_0 + 2abx_0},$$

et comme $ux_0 + vy_0 - 1 = 0$:

$$u = \frac{2ab}{(a^2 - b^2)y_0 + 2abx_0}.$$

De sorte que l'équation de la droite PP′ est :

$$2abx + (a^2 - b^2)y = 2abx_0 - (a^2 - b^2)y_0. \qquad (\gamma)$$

Les équations (α) et (γ) donnent :

$$x = \frac{[2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0][2aby_0 - (a^2 - b^2)x_0]}{y_0(a^2 + b^2)^2}.$$

$$y = \frac{2abx_0 + (a^2 - b^2)y_0}{y_0(a^2 + b^2)^2}.$$

Ceci établi, nous avons deux remarques importantes à faire : d'abord la droite PP′ reste parallèle à l'asymptote de la cubique Γ ; en second lieu, si l'on désigne pac m_0 et m les coefficients angulaires des droites OP et OP′, la relation (α) donne : $2abmm_0 - (a^2 - b^2)(m + m_0) - 2ab = 0$, ce qui prouve que les droites OP, OP′ sont les couples de rayons conjugués d'un faisceau en involution. Ce faisceau peut être engendré comme il suit. Si de P on abaisse les perpendiculaires PH et PK respectivement sur la parallèle OE et sur la perpendiculaire à l'asymptote de la cubique Γ, la relation (α) signifie que $\dfrac{y}{x} = \pm \dfrac{\text{PH}}{\text{PK}} = \pm \operatorname{tg} \theta$, θ étant l'angle de OP avec OE. Donc OP′ fait avec Ox un angle égal en grandeur à l'angle de OP avec OE. Donc OP et OP′ sont symétriques par rapport aux bissectrices des angles de Ox avec OE, lesquelles sont les rayons doubles du faisceau involutif. On trouve facilement que l'équation générale des couples de rayons conjugués de ce faisceau est de la forme

$$y^2 + c(\beta - 1)xy + \beta x^2 = 0,$$

égalité dans laquelle c est égal à $-\dfrac{a^2 - b^2}{2ab}$.

Il résulte de ce qui précède que toute courbe C de l'énoncé est telle qu'une parallèle quelconque à l'asymptote de Γ la coupe en des points qui deux à deux se trouvent sur un couple de rayons conjugués du faisceau. Les coordonnées de deux points correspondants P, P′ d'une courbe C satisfont à deux équations de la forme :

$$y - cx = \alpha_1,$$
$$y^2 + c(\beta_1 - 1)xy + \beta_1 x^2 = 0.$$

Mais comme ils sont sur la courbe C considérée, β_1 est connu quand on connaît α_1, et inversement.

Donc il existe une certaine relation $\Psi(\alpha_1, \beta_1) = 0$ entre ces deux paramètres. L'équation de cette courbe C est donc

$$\Psi\left[y - cx, \frac{y(cx - y)}{x(x + cy)}\right] = 0,$$

et réciproquement toute équation de cette forme représente une courbe C.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

Je désire présenter aux lecteurs de ce Journal l'article de M. Vigarié et je veux dire aussi, en peu de mots, quelle a été l'origine et quel est le but de ce travail.

Il y a quelque temps, M. Vigarié me proposa de publier ici une monographie du point de Lemoine. C'était un mémoire bien ordonné, très complet, et clairement rédigé ; ce *sont là* d'ailleurs les qualités ordinaires de notre jeune et très zélé collaborateur. Mais je songeais déjà, à cette époque, à la nécessité d'un travail d'un ordre plus général, embrassant le rappel de l'ensemble des propriétés les plus saillantes de la nouvelle géométrie du triangle, proposant aussi quelques néologismes, qui permissent de lire plus rapidement les notes qui la concernent et en même temps d'éviter, ou des confusions, ou des recherches souvent difficiles.

Pascal a dit dans *les Pensées :* « Les géomètres n'imposent des noms aux choses que pour abréger le discours et non pour diminuer ou changer l'idée des choses dont ils discourent; et ils prétendent que l'esprit supplée toujours la définition entière aux termes courts qu'ils n'emploient que pour éviter

la confusion que la multitude des paroles apporte. » Pourtant je connais d'excellents esprits qui, se trompant, je crois, sur ce point, répugnent à l'introduction des mots nouveaux et se refusent systématiquement à leur emploi. Toutes les propriétés de la géométrie élémentaire pouvant s'exprimer avec le langage ancien, pourquoi, disent-ils, faire usage d'expressions nouvelles qui ne peuvent que troubler le lecteur? Il y a un fond de vérité dans cette critique adressée aux créateurs de mots; et peut-être pourrait-on citer, dans cet ordre d'idées, plus d'un abus. Il y a plus de vingt ans (*) que M. Gerono s'élevant contre cet excès disait : « Le nombre des mots nouveaux est déjà considérable, il surpasse de beaucoup celui des idées nouvelles, et notez qu'il va toujours en augmentant ». Cette citation prouve seulement qu'il faut, dans la terminologie, comme ailleurs, éviter les excès et c'est surtout sur ce terrain qu'on peut trouver avec raison que le mieux est l'ennemi du bien. Mais pour revenir à la géométrie du triangle, il ne faut pas l'avoir longtemps pratiquée pour reconnaître l'impossibilité matérielle d'exprimer clairement ses propriétés si l'on n'accorde pas la connaissance de quelques termes ayant pour but, justement, « d'éviter la confusion que la multitude des paroles apporte ».

Je crois d'ailleurs que la cause que je plaide ici est depuis longtemps gagnée; il suffit de lire les nombreuses notes qui paraissent à l'étranger sur cette géométrie, si attrayante par la fécondité et la simplicité de ses propriétés, pour reconnaître que la nécessité d'un langage nouveau s'impose à tous ceux qui veulent écrire sur elle ou seulement la comprendre. Si j'ai cru devoir insister sur un point qui me paraît évident de lui-même, c'est, comme je l'ai dit, que certains, confondant l'excès avec la juste mesure, semblent prévenus, outre mesure, contre tout langage nouveau: or, c'est là, dans un sens inverse, un autre excès.

C'est à ceux-là surtout que je me permets de recommander le substantiel et important travail que M. Vigarié a bien voulu entreprendre sur mon conseil, en étendant l'idée excel-

(*) *Nouvelles Annales*, 1864, p. 415.

lente qu'il avait eue et qui avait donné naissance à la note à laquelle j'ai fait allusion plus haut.

Le présent mémoire rendra, j'en ai le ferme espoir, les plus grands services à tous ceux qui s'intéressent à la géométrie du triangle. Cette science est née en France mais elle y est encore, comme le fait observer avec raison M. Vigarié, peu répandue, bien qu'elle soit déjà classique à l'étranger; le travail de M. Vigarié contribuera puissamment, pensons-nous, à la faire connaître et aimer. G. L.

La géométrie du triangle a reçu depuis quelques années de grands développements, grâce aux travaux de MM. J.-J.-A. Mathieu, G. de Longchamps, E. Lemoine, H. Brocard, J. Neuberg, M. d'Ocagne. G. Tarry, E. Catalan, J. Casey, R. Tücker, H.-M. Taylor, M. Cay, T.-C. Simmons, Hain, A. Artzt, Stoll, Fuhrmann, Kiehl... Ces développements ont eu pour origine principale les études de M. E. Lemoine (A.-F. Lyon 1873, Lille 1874) *sur un nouveau point remarquable du plan du triangle* auquel son nom est maintenant attaché, et qui est, sans contredit, le plus important du triangle, après le centre de gravité. Nous allons essayer de grouper et de coordonner les résultats si intéressants dont l'ensemble constitue cette nouvelle géométrie.

Les recherches des géomètres qui se sont occupés du triangle, ayant été faites le plus souvent, simultanément, *ou* sans connaître les travaux antérieurs, il en est résulté plusieurs noms pour désigner le même point ou la même ligne, et quelquefois le même terme a désigné des éléments entièrement différents : d'où la confusion ou l'ambiguïté.

Nous avons essayé de trouver parmi les différents termes proposés pour un même point ou pour une même ligne, celui qu'il serait préférable d'employer, en conservant un nom particulier aux éléments remarquables et en donnant à ceux qui en dérivent des noms rappelant leur liaison avec les précédents. Pour arriver à ce but, nous nous sommes reporté aux mémoires originaux (*) et nous avons consulté MM. Brocard, Lemoine,

(*) M. John Casey, dans son *Treatise on the Analytical geometry*, et surtout dans la dernière édition (1886) de son *Sequel to Euclide*, a résumé

de Longchamps, Neuberg, qui ont plus particulièrement attaché leur nom à cette nouvelle théorie, et dont la part dans le succès de la géométrie du triangle est si grande. Autant que possible, devant des avis quelquefois différents, nous avons adopté le mot qui paraissait le plus généralement proposé. Nous avons cité d'ailleurs, dans des notes qu'on trouvera placées au bas des pages, les autres termes qui ont été employés dans un même sens.

Nous diviserons ce travail en deux parties : dans la première, nous donnerons des idées générales sur quelques méthodes de transformations ou de conjugaisons particulièrement utiles dans la géométrie du triangle ; dans la seconde, nous étudierons quelques points et quelques lignes remarquables. Nous ferons aussi le rappel de leurs principales propriétés, et nous donnerons les coordonnées ou les équations barycentriques (*) des éléments que nous énumérerons.

---

d'une façon remarquable la géométrie du triangle ; aussi lui avons-nous fait de nombreux emprunts. Nous avons aussi eu recours aux principales publications mathématiques, et dans cette étude, nous emploierons pour les désigner les abréviations suivantes :

M.	*Mathesis.*
J. S.	*Journal de Mathématiques spéciales.*
J. E.	*Journal de Mathématiques élémentaires.*
E. T.	*The Educational Times.*
Q. J.	*Quarterly Journal of Pure and applied Mathematics.*
P. L.	*Proceedings of the London Math. Society.*
A. F.	*Association française pour l'avancement des Sciences.*
B. M.	*Bulletin des Sciences mathématiques.*
S. M.	*Bulletin de la société mathématique.*
A. G.	*Annales de Mathématiques de Gergonne.*
J. C.	*Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal de Crelle).*
N. A. M.	*Nouvelles Annales de Mathématiques.*
A. E. N.	*Annales de l'Ecole normale supérieure.*
N. C. M.	*Nouvelle correspondance mathématique.*
A. G. H.	*Archives der Physik und Mathematik (Archives de Grunnert-Hoppe).*

(*) Pour éviter toute confusion, nous emploierons les lettres α, β, γ pour désigner les coordonnées barycentriques et les lettres x, y, z pour désigner les coordonnées normales. D'ailleurs, on passera d'un système de coordonnées à l'autre au moyen des formules :

$$\frac{\alpha}{ax} = \frac{\beta}{by} = \frac{\gamma}{cz}.$$

1. Notations. — Le triangle *fondamental, primitif* ou de *référence* étant désigné par ABC nous noterons un point quelconque pris dans le plan de ce triangle par la lettre M. Ce point donne naissance, par suite de constructions géométriques, à d'autres points ou lignes remarquables que nous désignerons par les lettres M, m ou μ affectées d'accents, ou d'indices.

Les pieds des droites AM, BM, CM (*) sont M', M'', M''' et les longueurs de ces droites sont m', m'', m'''; longueurs comptées respectivement entre A et M', B et M'', C et M'''.

Les conjugués harmoniques de M', M'', M''' par rapport aux extrémités des côtés du triangle de référence sont μ', μ'', μ'''. Ces trois points sont sur une même droite μ qui est appelée par M. G. de Longchamps (*J. E.* 1886, p. 130) *droite harmoniquement associée* au point M (**).

Les droites $A\mu'$, $B\mu''$, $C\mu'''$ se coupent deux à deux en trois points M_a, M_b, M_c qui sont les *points algébriquement associés* au point M. Le triangle $M_aM_bM_c$ sera le *triangle harmoniquement associé* au point M.

Les droites $M'M''$, $M''M'''$, $M'''M'$ sont les *pédales* de M et le triangle $M'M''M'''$ est le *triangle pédal* de M. Enfin, les projections orthogonales de M sur les côtés du triangle sont $m_am_bm_c$ et le triangle $m_am_bm_c$ est le *triangle podaire* de M.

Ces notations nous ont été communiquées par MM. Neuberg et de Longchamps.

Nous appellerons, suivant l'usage, a, b, c, les côtés du triangle ABC, nous désignerons son périmètre par $2p$ et sa surface par S. Enfin nous adopterons les abréviations suivantes proposées par M. H. Brocard (***)

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2 \qquad a^4 + b^4 + c^4 = q^4$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = n^4$$

relations qui donnent d'ailleurs

$$q^4 + 2n^4 = m^4.$$

(*) Les droites AM, BM, CM sont quelquefois appelées *transversales angulaires* du point M (Hain).

(**) Ou *polaire trilinéaire* de M. Ce terme créé par M. Mathieu (*N. A. M.* 1865) a été employé par plusieurs auteurs, notamment par M. Neuberg (*J. S.* (2), V. 1886, p. 8, et *Mémoire sur le Tétraèdre*).

(***) *A. F.* Rouen, 1883

Nous désignerons par :
G le centre de gravité ou point de concours des médianes ;
H l'orthocentre (*) ou point de concours des hauteurs;
O le centre du cercle circonscrit de rayon R;
I le centre du cercle inscrit de rayon r;
I_a, I_b, I_c les centres des cercles ex-inscrits de rayon r_a, r_b, r_c;
O_9 le centre du cercle d'Euler (cercle des neuf points).

I

TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES

2. — Étant donné un point M dans le plan du triangle, on pourra toujours trouver, et d'une infinité de façons, un second point M', qui correspondra au premier d'après une loi géométrique imaginée ; ces deux points M, M' auront entre eux des relations géométriques dont la simplicité dépendra du choix plus ou moins heureux de la loi qui les unit et chaque loi géométrique donnera lieu à une *méthode de transformation* ou à un *mode de conjugaison* qu'il reste ensuite à étudier. On voit, au point de vue de la géométrie du triangle, l'importance de ces méthodes qui multiplient le nombre des points ou, plus généralement, des éléments remarquables.

Nous allons indiquer, parmi ces méthodes, celles qui intéressent plus particulièrement le sujet qui nous occupe ici.

Dans un mémoire ayant pour titre : *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en géométrie* (*J. C.* VIII, 1831, pp. 51-63), M. J. Magnus (de Berlin) a le premier posé les principes généraux qui doivent s'appliquer à toute méthode de transformation dans laquelle on fait correspondre un point à un point, et aussi à celle dans laquelle à une droite on fait correspondre une droite, puisqu'il suffit de transformer les

(*) On a attribué (voir *M.* 1881, p. 154 — *J. E.* 1885, p. 244, 1886, p. 3 — *A. F.* Rouen, 1883, p. 190, ce néologisme à James Booth (*A new treatise of some geometrical methods*, 1877). M. T. C. Simmons, dans une des lettres que nous avons reçues de lui, nous a fait observer que M. le Dr Besant avait indiqué ce terme à ses élèves dès 1870.

résultats précédents par les polaires réciproques. Dans ce mémoire Magnus a donné un théorème qui, complété par M. de Longchamps (*A. E, N.* 1866, p. 321) peut s'énoncer ainsi :

Toutes les fois que, dans une méthode de géométrie comparée, à un point correspondra un point, alors à une droite correspondra une conique passant par trois points fixes et à une courbe de l'ordre m *et de la classe* n *correspondra une courbe de l'ordre* 2m *et de la classe*(2m + n)*ayant pour points multiples de l'ordre* m *les trois points fixes* (*).

Ces points fixes sont appelés *points principaux* (Magnus, *loc. cit.*) ou *points fondamentaux* (Abel Transon *N. A. M.* 1865,

(*) Ce théorème ne visait que les transformations considérées par M. Magnus et qui sont non seulement birationnelles, mais caractérisées par les formules

$$x = \frac{U}{V}, \quad y = \frac{R}{T};$$

U, V, R, T étant fonctions linéaires de nouvelles coordonnées X, Y.

Alors, à une droite

$$ax + by + c = 0,$$

correspond une conique

$$aUT + bRV + cVT = 0,$$

passant par les trois points fixes :

$$T = 0\ R = 0, \quad T = 0\ V = 0, \quad U = 0\ V = 0.$$

C'est dans ces conditions que M. de Longchamps a étendu le théorème de M. Magnus; mais ce théorème, et le complément qu'en a donné M. de Longchamps, s'appliquent à toutes les transformations *birationnelles*.

Voyez à ce propos un mémoire de M. T. A. Hirst (*N. A. M*; 1866, p. 213, ayant pour titre : *Sur la transformation quadrique.*)

« Magnus, dit M. Hirst, dans ce mémoire a supposé à tort que sa méthode de transformation était la plus générale de celles dans lesquelles à un point de l'un des systèmes correspondait un seul point de l'autre. Les recherches subséquentes de Cremona, de Jonquières, Clebsch et Cayley ont montré que cela n'a pas lieu : la transformation de Magnus est seulement la plus générale de celles pour lesquelles *à chaque ligne droite correspond une conique...* »

C'est dans ces conditions qu'il faut entendre le théorème de M. G. de Longchamps.

Les développements qui suivent ont pour but de montrer que toute transformation du genre Magnus peut se ramener à la transformation par points réciproques de M. G. de Longchamps, ou à la transformation par points inverses du colonel Mathieu, suivant le système de coordonnées employé. Nous les avons empruntés à *Salmon-Chemin*, p. 440; *Clebsch-Lindemann*, chap. IV, § IX; Mansion, *N. C. M.*, t. I, p. 54.

p. 392). L'élégante démonstration donnée par M. G. de Longchamps a été reproduite par Chasles *(Rapport sur les progrès de la géométrie*, p. 372).

On appelle transformation birationnelle (*), toute transformation dans laquelle à un point de la première figure correspond un point unique de la seconde; et réciproquement. Les coordonnées (x, y, z) d'un point de la première figure sont des fonctions rationnelles des coordonnées (X, Y, Z) d'un point de la seconde figure, et réciproquement, le triangle de référence étant le même, ou non, posons :

$$\frac{x}{f_1(X,Y,Z)} = \frac{y}{f_2(X,Y,Z)} = \frac{z}{f_3(X,Y,Z)}.$$

Si (X,Y,Z) sont données, on en déduit le point unique (x, y, z).

Si (x, y, z) sont connues, le point (X, Y, Z) est à l'intersection des deux courbes

$$\left.\begin{array}{l} xf_2(X, Y, Z) - yf_1(X, Y, Z) = 0. \\ xf_3(X, Y, Z) - zf_1(X, Y, Z) = 0. \end{array}\right\} \quad (A)$$

Ces courbes sont du n^{me} degré si f_1, f_2, f_3 sont des fonctions homogènes du degré n. Elles se coupent en n^2 points qui ont pour correspondant le point (x, y, z).

Pour qu'il n'y ait qu'un seul point (X,Y,Z) correspondant au point (x,y,z) il faut supposer que les courbes ont $(n^2 - 1)$ points communs, alors les courbes (A) n'ont plus qu'un point commun, variable avec le point (x,y,z) et qui est le point (X,Y,Z). Les $(n^2 - 1)$ points communs aux deux courbes (A) sont des points fixes (**).

Si les courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ sont du second ordre et ont trois points communs, la transformation est quadratique birationnelle, alors à la droite

$$kx + ly + mz = 0$$

(*) Voyez sur ces transformations un mémoire de Cayley, *On the rational transformation between two spaces*, P. L., t. III; et un mémoire de M. E. Amigues, *Sur les transformations du second degré dans les figures planes* (*N. A. M.*, 1877).

(**) Lorsque $n > 2$, les fonctions f_1, f_2, f_3 ont encore à remplir d'autres conditions, pour l'examen desquelles nous renvoyons aux ouvrages cités de Salmon ou de Clebsch.

correspond la conique :

$$kf_1 + lf_2 + mf_3 = 0$$

passant par les points fixes.

Considérons la transformation quadratique qui correspond aux formules :

$$\frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3}.$$

Nous avons alors

$$\frac{kx + ly + mz}{kf_1 + lf_2 + mf_3} = \frac{k'x + l'y + m'z}{k'f_1 + l'f_2 + m'f_3} = \frac{k''x + l''y + m''z}{k''f_1 + l''f_2 + m''f_3}.$$

Si les points fixes P, Q, R sont réels et distincts, on peut choisir k, l, m, k', l', m', k'', l'', m'' de manière que

$$kf_1 + lf_2 + mf_3 = 0, \quad k'f_1 + l'f_2 + m'f_3 = 0, \quad k''f_1 + l''f_2 + m''f_3 = 0,$$

soient les équations des couples de droites

(PQ, PR) (QR, QP) (PR, QR)

qui passent par les points fixes. Prenons le triangle PQR pour triangle de référence, alors ces formules deviennent

$$\frac{kx + ly + mz}{YZ} = \frac{k'x + l'y + m'z}{XZ} = \frac{k''x + l''y + m''z}{XY}.$$

Les droites, représentées par les équations

$$kx + ly + mz = 0, \quad k'x + l'y + m'z = 0, \quad k''x + l''y + m''z = 0,$$

peuvent être choisies pour côtés du triangle de référence de la première figure, alors les formules de transformation sont :

$$\frac{x}{YZ} = \frac{y}{XZ} = \frac{z}{XY},$$

ou

$$xX = yY = zZ.$$

On retombe ainsi sur les formules de la transformation par points réciproques de M. G. de Longchamps.

Si l'on veut mettre en évidence les constantes qu'on a fait entrer dans les coordonnées (x, y, z), (X, Y, Z) on écrit ces formules de la manière suivante

$$\frac{xX}{p} = \frac{yY}{q} = \frac{zZ}{r}.$$

Le théorème de M. G. de Longchamps, énoncé plus haut, porte sur un point différent de celui que nous venons d'exa-

miner, savoir sur la détermination de la classe de la courbe transformée. Mais pour la démonstration de ce théorème nous renvoyons le lecteur aux sources citées (*).

(A suivre.)

Voici, au sujet des transformations, quelques renseignements bibliographiques touchant les travaux qu'elles ont provoquées.

M. Ed. Dewulf dans une note « sur les transformations géométriques des figures planes, d'après les mémoires publiés par M. Cremona et des notes inédites. » *(B. M.* V, 1873, p. 206-240) a donné la liste suivante des auteurs dont les travaux, à cette date, étaient postérieurs à ceux de M. Cremona :

Cayley. — A memoir on the rational transformations between two spaces (*P. L.*, III, 1870, p. 136).

Nöther. — Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen (*Math. Annalen*, III, 1870, p. 164).

Zur theorie der eindeutigen ebenen Transformationen (*Math. Annalen*, V, 1872, p. 635).

Rosanes. — Ueber diejenigen rationalen Substitutionen welche rationale Umkehrung zulassen (*J. C.* LXIII, 1871).

Clebsch. — Zur theorie der Cremona'schen Transformationen (*Math. Annalen*, IV, 1871, p. 490).

Samuel Roberts. — On professor Cremona's transformation between two planes (*P. L.*, IV, 1872, p. 121).

Depuis lors, les transformations géométriques ont fait l'objet de recherches extrêmement multipliées; sans vouloir entrer ici dans un essai de nomenclature sur ces travaux, voici, à titre de renseignement, une liste assez étendue, mais encore très incomplète, de ceux d'entre eux qui ont été publiés dans ces dernières années.

Bertini. — Sopra una classe di transformationi univoche involutorie (*Annali di mathématica*, t. VIII, 1874, et *B. M.*, 2me série, t. I, 1877.

L. Cremona. — 1° An Example of the method of deducing a surface from a plane figure (*Trans. Royal Soc. Edinb.*, 1884).

2° On a geometrical transformation of the fourth order in space of three dimensions, the inverse transformation being of the sixth order. (*Trans. Royal Irish Acad.*, 1884).

3° Sulle trasformazioni razionali nello spazio. (*Annali di matematica*, série 2, t. V).

4° Sopra una trasformazione del sesto grado dello spazio a tre dimensioni la cui inversa è del 5° grado (*P. L.*, 1884).

T.-A. Hirst. — 1° On quadric transformation (*Q. J.*, 1881).

2° On Cremonian congruences (*P. L.*, V, XIV, 1883).

3° On congruences of the Third Order and Class (*P. L.*, 1885).

Le Paige. — Sur quelques transformations géométriques uniformes. *Bulletin de l'Ac. de Belgique*, 1882.)

P.-H. Schoute. — 1° Application de la transformation par droites symé-

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud,** professeur de Mathématiques spéciales
au lycée du Havre.

Il n'y a pas bien longtemps que d'Alembert disait à qui voulait apprendre les mathématiques : « Allez de l'avant, la foi vous viendra, » et, aujourd'hui encore, il n'est pas rare de rencontrer, çà et là, des traces des incertitudes passées sur la rigueur de l'analyse infinitésimale. Maintenant que le calcul différentiel ainsi que la théorie des suites infinies sont nettement entrés dans le programme de la classe de

---

triques à un problème de Steiner (*Bulletin de Darboux*, 2ᵉ série, t. VII, 1883).

2° Sur deux transformations géométriques uniformes. (*A. F.* Congrès de Rouen, 1883).

3° Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes (*Archives néerlandaises*, t. XX, 1885).

4° *Wskundige Opgaven*, t. 2, p. 240, problème 148.

5° Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformaties (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. IX ; *B. M.*, 1886).

I.-S. Vanecek. — 1° Sur l'inversion générale (*Comptes rendus*, 1882 ; *P. L.*, 1882).

2° Explication de la transformation par rayons vecteurs réciproques. (*A. F.* Congrès de Rouen, 1883).

3° Sur la transformation des figures polaires réciproques (*Mém. Soc. Sc. Liège*, t. XII).

I.-S. et M.-N. Vanecek. — Sur un mode de transformation dans l'espace (*Comptes rendus*, 1882 et 1883).

R. Sturm (de Münster). Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen (*Mathem. Ann.*, t. XXVI).

A. Pepoli. Sopra un problema delle trasformazioni Cremoniane (*Atti del Collegio degli Ingegneri et Arch. di Palermo*, 1884).

F. Aschieri. La trasformazione quadratica doppia di spazio e la sua applicazione alla geometria dello spazio non euclideo (*Rend. Istit. Lomb.*, 1881).

G. de Longchamps. 1° Étude d'une transformation réciproque (*J. S.* 1882, pp. 49, 77, etc.).

Mathématiques spéciales, on ne jugera peut-être pas inopportun de rassurer complètement nos débutants : c'est à eux que s'adresse cette étude.

I

Il est difficile de dire quel trouble a jeté dans le monde savant l'apparition du calcul infinitésimal de Leibnitz. D'un coup, il semblait qu'il s'agit de rompre avec la vieille rigueur des raisonnements mathématiques. Aux démonstrations d'Euclide, on allait substituer désormais une sorte de voltige ou de jonglerie avec des éléments qui ne répondaient à aucune notion exacte. Sans doute on réussissait ainsi : Leibniz et beaucoup d'autres à sa suite eurent bientôt montré la puissance de ce nouvel instrument de recherche, et, par de nombreuses applications, prouvé son adaptation toute spéciale au monde physique. Mais ces beaux résultats ne pouvaient répondre aux objections qui s'élevaient de toutes parts. Les infiniment petits sont-ils, oui ou non, des êtres ayant une existence définie? — Ou bien faut-il voir en eux de purs

---

2° Transformation plane des quadriques (*J. S.* 1884, p. 193).

M. D'OCAGNE. 1° Sur une transformation polaire des courbes planes (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas,* 1883).

2° Sur les transformations centrales des courbes planes (*M.* 1884, pp. 73 et 97).

DE JONQUIÈRES. 1° Sur les transformations géométriques birationnelles d'ordre *n* (*Comptes rendus*, 19 octobre 1885).

2° Modes de solution d'une question d'analyse indéterminée qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona (*Comptes rendus,* 2 et 9 novembre 1885).

G.-B. GUCCIA. 1° Formole analitiche per la trasformazione Cremoniana (*Rendi Conti del Circolo Matematico di Palermo*, 1884, 1885, 1886, pp. 24, 50).

2° Sur les transformations géométriques planes birationnelles (*Comptes rendus,* 26 octobre 1885).

3° Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano. Estensione di alcuni teoremi di Hirst sulle trasformazioni quadratiche (*Rendi Conti del Circolo...*, p. 119, 7 février 1886).

NEUBERG. *Sur le point de Steiner* (J, S., 1886). *Mémoire sur le tétraèdre.* (Mémoires de l'Ac. de Belgique, 1884). *Wiskundige Opgaven*, t. 2, p. 237, problème 148.

CASEY. On cubic transformations (*Royal Irisch Academy*, 1880).

DEWULF. Sur une transformation géométrique générale (A. E. N., 1886).

zéros? — Dans le premier cas, comment peut-on les négliger jamais, sans se laisser accuser de transformer les mathématiques en science d'approximations? Dans le second cas, la distinction et la comparaison des infiniment petits deviennent choses illusoires...

On se divise en partisans et adversaires des nouveaux calculs. On entasse d'un côté objections sur objections : les réponses ne se font pas attendre mais le débat reste ouvert. L'émotion est bien loin de se calmer. Le bruit que font les infiniment petits franchit les limites du monde savant, les Parisiens font sur eux une chanson, dit Montucla, et vont rire au théâtre aux dépens d'un mathématicien bien connu, le marquis de l'Hopital, tout comme les Athéniens avaient ri jadis du géomètre Méton, mis sur la scène par Aristophane (1).

Tout ce tapage venait-il de ce qu'une grande révolution se produisait dans les sciences mathématiques? N'était-il pas plutôt une simple conséquence de ce que la notion de l'infiniment petit avait de vague, de bizarre, et de presque mystérieux dans l'imagination du public, et dans l'esprit même des mathématiciens? Tous les premiers, par l'idée imparfaite qu'ils s'en faisaient, ils contribuaient à faire voir dans ces éléments « des êtres singuliers qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités tantôt doivent être traitées comme absolument nulles et semblent par leurs propriétés équivoques tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant » (2).

Le Hollandais Nieuwentyt ayant reproché à Leibniz de considérer comme égales des quantités dont la différence est infiniment petite, Leibniz eut manifestement quelque peine à se défendre. Sa première réponse où il appelait ses infiniment petits des incomparables, et les assimilait au grain de sable, qu'on peut négliger près de la grandeur du globe terrestre, était bien plus faite pour troubler les esprits que pour les rassurer. La conception qu'elle donnait de l'infini-

---

(1) Hœfer, *(Histoire des Mathématiques)*.

(2) Carnot *(Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal)*.

ment petit était d'autant plus dangereuse qu'elle était plus accessible à tous : elle se propagea rapidement, c'est celle, par exemple, qu'on trouve développée très nettement, sans restriction, dans le dictionnaire de Trévoux.

D'un autre côté, quelques-uns pensèrent que la rigueur mathématique exigeait, pour justifier la suppression d'un infiniment petit dans un calcul, une valeur rigoureusement nulle à cet élément. Newton avait déjà dit : « Il faut entendre par la dernière raison des quantités évanouissantes, la raison qu'ont entre elles des quantités qui diminuent non pas avant de s'évanouir ni après qu'elles sont évanouies, mais au moment même où elles *s'évanouissent.* »

Euler fit un pas de plus en déclarant qu'il faut voir dans les infiniment petits de véritables zéros. La méthode du calcul différentiel n'en devint ni plus claire ni plus nette.

Après tous les travaux du XVIIIe siècle, Lagrange juge qu'il est impossible d'atteindre la rigueur mathématique avec toute méthode fondée sur les infiniment petits, et il essaie d'établir dans la théorie des fonctions analytiques « les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. » Cette tentative, en substituant aux méthodes directes de Newton ou de Leibniz une voie détournée, qui devait conduire aux mêmes résultats, bien loin de clore le débat était une sorte de capitulation. Carnot dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* a semblé d'abord comprendre que toutes les difficultés apparentes venaient de ce que la notion de l'infiniment petit avait encore de vague, mais les éclaircissements qu'il a donnés sur ce point, si nets et si précis, n'ont pas suffi pour lui-même à détruire le fantôme de cette mystérieuse métaphysique. Il a voulu chercher dans les dessous de la méthode ce qui la justifie, et a cru y parvenir en montrant que les erreurs introduites ne sont que provisoires et doivent être finalement compensées puisque les infiniment petits ne subsistent pas dans les résultats. En réalité, comme l'a très bien dit M. Ch. de Freycinet, c'est làune façon de prouver, de vérifier, et non d'expliquer une vérité.

Ainsi il faut avouer que si, pour avoir une idée nette de la méthode infinitésimale, on s'adresse aux inventeurs eux-mêmes des nouveaux calculs, ou à ceux qui, jusqu'au commencement de ce siècle, en ont étudié la nature, on se sent bien mal à l'aise après cette consultation. Mais aujourd'hui, qu'on ouvre les traités de Duhamel ou de M. Bertrand, et je me trompe fort ou on sera frappé d'une chose, non pas que la métaphysique du haut calcul est enfin expliquée, mais plutôt que le haut calcul n'implique pas une métaphysique spéciale (1). *(A suivre.)*

QUESTION PROPOSÉE

218. — On considère une strophoïde oblique S ayant pour point double le point O. Les tangentes en O ont, pour bissectrices des angles qu'elles forment, deux droites Δ, Δ' qui rencontrent S, respectivement aux points P, P'.

Démontrer les propriétés suivantes : 1° La projection de O sur PP' est un point Q situé sur S; 2° le point Q', isotomique de Q sur PP' (c'est-à-dire symétrique de Q par rapport au milieu de PP') appartient à l'asymptote réelle de S; 3° cette asymptote est parallèle à la droite qui joint O au milieu de PP'; 4° si du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un cercle Δ, les tangentes issues des points P, P' à ce cercle se coupent en quatre points situés sur S.

(G. L.)

(1) L'Historique précédent n'a pas la prétention d'être complet. Plus d'un livre paru au XVIIIe siècle porte déjà les marques d'une grande rigueur; mais, en tous cas, aucun n'avait pu exercer une influence suffisante pour dissiper le trouble des esprits.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 2374-7.

SUR LES FOCALES D'UNE SURFACE
DU SECOND ORDRE
CIRCONSCRITE A UNE QUADRIQUE DONNÉE

Par M. V. **Hioux**, professeur au lycée de Nantes.

(*Suite*, voir p. 25).

3. — Chacune des valeurs de λ, racine de l'équation (*) est une fonction des coordonnées du pôle du plan P et du paramètre K (1). — On peut d'après cela se proposer le problème suivant :

Problème. — *Étant données une quadrique* (E) *et une surface homofocale* (A), *trouver une surface inscrite dans* (A) *suivant une conique* (C′) *et admettant comme focale une conique* (C) *située sur* (E), *les plans* P′ *et* P *des deux coniques ayant le même pôle par rapport aux deux surfaces.*

Prenons encore pour quadrique (E) un ellipsoïde, et soit (x_1, y_1, z_1) le pôle du plan (P). La conique (C) est représentée par les équations

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$P = \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0.$$

De même la conique (C′) sera représentée par les deux équations

$$A = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

$$P' = \frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_1}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Une surface inscrite dans (A) suivant la conique (C′) a pour équation :

$$\varphi' = \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 - KP'^2 = 0.$$

(*) Si donc on se donne aussi la valeur de λ on pourra déterminer la valeur de K.

Formons l'équation

$$\varphi' + \mu S = 0,$$

dans laquelle

$$S = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0$$

et exprimons, comme précédemment, que l'intersection de la surface inscrite et de la sphère de rayon nul se compose de deux courbes planes et nous aurons les trois conditions:

$$\frac{\dfrac{x_1^2}{a^2 - \lambda}}{1 + \mu(a^2 - \lambda)} + \frac{\dfrac{y_1^2}{b^2 - \lambda}}{1 + \mu(b^2 - \lambda)} + \frac{\dfrac{z_1^2}{c^2 - \lambda}}{1 + \mu(c^2 - \lambda)} - \frac{1}{K} = 0,$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\beta y_1}{b^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\gamma z_1}{c^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} - 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\beta^2}{b^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} + \frac{\gamma^2}{c^2 - \lambda + \dfrac{1}{\mu}} - 1 = 0.$$

Si dans les deux dernières équations on désigne par x, y, z les coordonnées courantes α, β, γ, on voit immédiatement que si on pose

$$\frac{1}{\mu} - \lambda = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{1}{\lambda},$$

ces deux équations deviennent celles de la conique (C).

Pour cette valeur de μ, on trouve:

$$\frac{1}{K} = \frac{\lambda x_1^2}{a^2(a^2 - \lambda)} + \frac{\lambda y_1^2}{b^2(b^2 - \lambda)} + \frac{\lambda z_1^2}{c^2(c^2 - \lambda)}.$$

La surface représentée par l'équation

$$\left[\frac{\lambda x_1^2}{a^2(a^2 - \lambda)} + \frac{\lambda y_1^2}{b^2(b^2 - \lambda)} + \frac{\lambda z_1^2}{c^2(c^2 - \lambda)}\right]\left[\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1\right]$$
$$- \left[\frac{x x_1}{a^2 - \lambda} + \frac{y y_1}{b^2 - \lambda} + \frac{z z_1}{c^2 - \lambda} - 1\right]^2 = 0 \qquad (5)$$

est par suite une surface inscrite dans (A) suivant la conique (C'), et admettant comme focale la conique (C).

Comme λ est un paramètre arbitraire, on a ainsi obtenu l'équation générale des quadriques admettant comme focale la conique (C).

Remarque. — Dans l'équation du premier paragraphe

$$\varphi + \lambda S = 0,$$

λ est un paramètre du degré -2 et si on pose $\lambda = -\frac{1}{h^2}$, la condition (1) détermine la valeur de K à laquelle correspond la surface circonscrite à (E) qui admet comme focale l'intersection de la surface

$$\frac{x^2}{a^2 - h^2} + \frac{y^2}{b^2 - h^2} + \frac{z^2}{c^2 - h^2} - 1 = 0$$

et du plan

$$\frac{xx_1}{a^2 - h^2} + \frac{yy_1}{b^2 - h^2} + \frac{zz_1}{c^2 - h_1} - 1 = 0.$$

En se reportant à la question inverse qui précède, on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si deux surfaces homofocales du second degré sont coupées par des plans* P *et* P′ *de même pôle suivant des coniques* (C) *et* (C′), *on peut toujours circonscrire, à l'une quelconque suivant la conique qui s'y rapporte, une quadrique admettant comme focale l'autre conique.*

4. — Développons l'équation (5), par rapport à l'une des variables, par exemple par rapport à z, et dans ce cas multiplions les deux membres par $(c^2 - \lambda)$, nous obtenons

$$\left[\frac{\lambda x_1^2}{a^2(a^2 - \lambda)} + \frac{\lambda y_1^2}{b^2(b^2 - \lambda)} - \frac{z_1^2}{c^2}\right]z^2 - 2z_1\left(\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} - 1\right)z$$
$$+ \frac{\lambda z_1^2}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1\right) + (c^2 - \lambda)\psi = 0,$$

en désignant par ψ, une fonction entière d'x, y et de z, indépendante de $c^2 - \lambda$.

Si maintenant nous faisons $\lambda = c^2$, nous avons l'équation (6)

$$\left[\frac{c^2 x_1^2}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{c^2 y_1^2}{b^2(b^2 - c^2)} - \frac{z_1^2}{c^2}\right]z^2 - 2z_1\left(\frac{xx_1}{a^2 - c^2} + \frac{yy_1}{b^2 - c^2} - 1\right)z$$
$$+ z_1^2\left(\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1\right) = 0, \qquad (6)$$

qui représente une surface particulière admettant (C) pour focale.

Cette surface coupe le plan des xy suivant la conique.

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0,$$

qui est la focale de (E) située dans le plan des xy.

Pour $\lambda = b^2$ et $\lambda = a^2$, on aurait deux autres surfaces passant par les deux autres focales de (E) et admettant (C) pour focale.

Soit B la surface représentée par l'équation (6), on voit que chacune des surfaces (E) et (B) passe par une focale de l'autre. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Étant données une conique* (C) *située sur une quadrique* (A) *et une focale* (C′) *de cette quadrique, on peut toujours faire passer par* (C′) *une quadrique* (A′) *admettant comme focale la conique* (C).

On peut observer que si (C) est une conique à centre, ce centre est nécessairement celui de la quadrique (A′) et son plan P un plan principal de cette quadrique. Les axes de (A′) sont donc la normale au plan de (C) en son centre et les axes de cette conique.

En cherchant les axes de la surface (A′) dont l'un est connu en direction, on obtiendra en direction, ceux de la conique (C).

D'autre part, on pourra calculer directement la longueur de l'axe perpendiculaire au plan P; on connaîtra ainsi une racine de l'équation aux carrés des demi-axes de la surface (A′), ce qui permettra de calculer les deux autres racines.

Ce calcul fait, on obtiendra facilement les longueurs des demi-axes de la focale en question.

On a donc ainsi une méthode pour calculer les axes d'une conique à centre, placée sur une quadrique dont on connaît une focale.

Nota. — On trouve encore d'autres propositions plus générales sur les surfaces homofocales dans une brochure de M. Darboux, intitulée: *Sur les Théorèmes d'Ivory, etc.*, publiée en 1872, chez Gauthier-Villars.

QUELQUES QUESTIONS

RELATIVES A L'ÉTUDE DES POINTS INVERSES

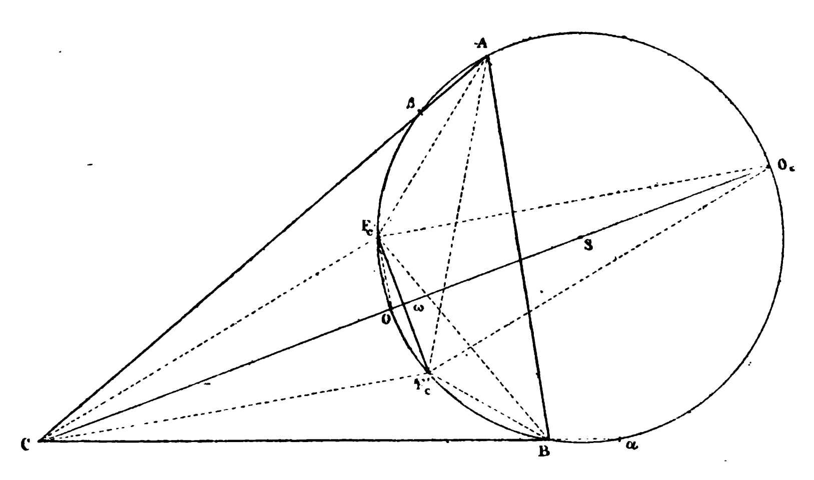
Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 28.)

5. — *Trouver, dans le plan d'un triangle* ABC, *deux points inverses* F_c, F'_c *tels que la ligne qui les joint soit vue de chaque sommet sous le même angle*, ou

Trouver une conique inscrite dans un triangle et telle que la ligne qui joint les foyers $F_cF'_c$ *soit vue de chaque sommet sous le même angle.*

Joignons les trois sommets aux points F_c, F_c et, pour construire la figure, supposons d'abord que les points $F_cF'_c$ soient à l'intérieur de ABC, que le quadrilatère $F_cF'_cBA$ soit convexe



et que F_c soit situé dans l'intérieur du triangle F'_cAC.

D'après l'hypothèse, nous avons

$$F'_cAF_c = F'_cBF_c = F_cCF_c;\quad \text{soit } \gamma \text{ cet angle.}$$

On a :

$$AF_cB = 180^0 - F_cAB - F_cBA = 180^0 - \frac{A+\gamma}{2} - \frac{B-\gamma}{2}$$
$$= \frac{180^0 + C}{2}$$

de même $$AF''^cB = \frac{180^0 + C}{2}$$

mais O étant le centre du cercle inscrit et O_c celui du cercle ex-inscrit tangent au côté AB, on a

$$AOB = \frac{180^0 + C}{2}$$
$$AB_cO = \frac{180^0 - C}{2}$$

Donc les points A, F_c, O, F'_c, B, O_c sont sur la même circonférence décrite sur CO_c comme diamètre, dont l'équation est :

$$c\gamma^2 - (a-b)\beta\gamma + (a-b)\alpha\gamma - c\alpha\beta = 0. \qquad (4)$$

Mais on a : $$F_cAC = \frac{A-\gamma}{2},$$
$$F_cCA = \frac{C-\gamma}{2};$$

d'où $$F^cAC - F_cCA = \frac{A-C}{2};$$

on a, de même, $$F'_cAC - F_cCA = \frac{A-C}{2}.$$

Ainsi F_c et F'_c appartiennent au lieu des points K tels que la différence des angles KAC et KCA soit égale à $\frac{A-C}{2}$.

Ce lieu est une hyperbole équilatère qui passe en C, en A, en O, et en O_b; elle a son centre au milieu de CA et son équation est :

$$(c-a)\beta^2 + b\beta\gamma - (c-a)\alpha\gamma - b\alpha\beta = 0. \qquad (5)$$

L'angle que la direction d'une des asymptotes fait avec CA est : $90^0 - \left(\frac{A-C}{4}\right)$.

F_c et F'_c sont donc déterminés par l'intersection des courbes représentées par les équations (4) et (5).

Si l'on retranche (5) de (4) il vient

$$(\beta-\gamma)\,((b-c)\alpha + (a-c)\beta - c\gamma) = 0$$

la droite

$$(b - c)\alpha + (a - c)\beta - c\gamma = 0 \qquad (6)$$

contient donc ausssi les points F_c, F'_c.

Comme F_c et F'_c sont de part et d'autre de CO qui est un diamètre du cercle (4) et que les angles F_c CO, F'_c CO sont égaux, il est clair que la droite (6) doit être perpendiculaire à CO et que F_c et F'_c sont symétriques par rapport à CO.

La droite (6) coupe CO_c en son milieu, c'est donc la diagonale du losange qui a pour autre diagonale CO_c et pour direction des côtés : CB et CA.

Remarque. — F_c et F'_c sont aussi sur l'hyperbole équilatère lieu des points K tels que

$$KBC - KCB = \frac{B - C}{2}$$

dont l'équation est

$$(c - b)\alpha^2 - (c - b)\beta\gamma + a\alpha\gamma - a\alpha\beta = 0. \qquad (7)$$

Nous aurions de même deux points F_b, F'_b qui seraient l'intersection de la droite

$$(c - b)\alpha - b\beta + (a - b)\gamma = 0 \qquad (8)$$

perpendiculaire élevée au milieu de BO_b et du segment capable de $\frac{180 + B}{2}$ décrit sur AC — segment contenant le point O — et deux autres points F_a, F'_a qui appartiennent à la droite

$$- a\alpha + (c - a)\beta + (b - a)\gamma = 0, \text{ etc.} \qquad (9)$$

Etudions les trois droites (6), (8) et (9).

$F_bF'_b$, $F_cF'_c$ se coupent au point $a, (c-b), -(c-b)$ milieu de O_bO_c
$F_cF'_c$, $F_aF'_a$ — — $-(a-c), b, (a-c)$ — O_cO_a
$F_aF'_a$, $F_bF'_b$ — — $(b-a), -(b-a), c$ — O_aO_b.

Les coordonnées de ω milieu de CO_c sont c, c, $(a + b - 2c)$.

Pour que F_c et F'_c existent, il faut que la droite (6) et le cercle (4) se coupent en des points réels; en éliminant γ on trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2c(a+b) - a^2 - b^2 - c^2 \pm \frac{2}{\sqrt{p}} S \sqrt{2c - p}}{2(a - c)(b - c)}$$

la condition de réalité est donc

$$2c > p \qquad \text{ou} \qquad 3c > a + b.$$

Si l'on suppose (ce que nous ferons désormais) $a > b > c$, on aura évidemment

$$3a > b + c, \quad \text{donc} \quad F_a,\ F'_a \quad \text{existent toujours.}$$

On a aussi

$$3b > a + c \quad \text{car cela peut s'écrire} \quad 2b > a - b + c$$

or $$a - b < c,$$
donc $$a - b + c < 2c,$$
et comme $2b > 2c$ on a, à fortiori
$$2b > a - b + c.$$

Donc F_b, F'_b existent toujours.

F_c, F'_c n'existent au contraire que si $3c > a + b$.

Cherchons la valeur de l'angle

$$F_cAF'_c = F_cBF'_c = F_cCF'_c = \gamma;$$

nous avons dans ce qui précède les éléments nécessaires, mais il est plus élégant de chercher cette valeur directement, d'autant plus que cela constitue une autre méthode pour résoudre la question proposée.

D'après la relation connue entre les sinus des angles que trois droites concourantes issues des sommets font avec les côtés d'un triangle, on a :

$$\sin ACF_c \times \sin CBF_c \times \sin BAF_c = \sin F_cCB \times \sin F_cBA \times \sin F_cAC$$

ou

$$\sin\frac{C-\gamma}{2}\sin\frac{B+\gamma}{2}\sin\frac{A+\gamma}{2} = \sin\frac{C+\gamma}{2}\sin\frac{B-\gamma}{2}\sin\frac{A-\gamma}{2}$$

ou

$$\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{B-\gamma}{2}\sin\frac{A-\gamma}{2}}{\sin\frac{B+\gamma}{2}\sin\frac{A+\gamma}{2}}$$

d'où, après transformations

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{p}{2c}$$

$$\cos\gamma = \frac{p-c}{c}$$

et

$$\cos C - \cos\gamma = \frac{(c-a)(b-c)p}{abc}$$

si α, β sont respectivement les angles $F_aAF'_a$, $F_bBF'_b$ on a

$$\text{séc}^2\frac{\alpha}{2} + \text{séc}^2\frac{\beta}{2} + \text{séc}^2\frac{\gamma}{2} = 4$$

$$\frac{p-a}{a},\quad \frac{p-b}{b} \text{ sont toujours plus petits que } 1;$$

$$\frac{p-c}{c} < 1 \quad \text{revient à} \quad 3c > a + b.$$

On retrouve donc les résultats déjà obtenus au sujet de la possibilité du problème.

On a toujours

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2a} < \cos^2\frac{C}{2};$$

donc F_a et F'_a sont à l'extérieur du triangle.

On a aussi

$$\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{p}{2b} < \cos^2\frac{C}{2};$$

donc F_b et F'_b sont aussi à l'extérieur du triangle.

On a

$$90^\circ > F_aAF'_a = 180^\circ - F_aBF'_a = 180^\circ - F_aCF'_a$$

et

$$90^\circ > F_bBF'_b = 180^\circ - F_bAF'_b = 180^\circ - F_bCF'_b.$$

La conique inscrite qui a :

F_a, F'_a pour foyers est une ellipse toujours réelle;

F_b, F'^b — — hyperbole;

F_c, F'_c — — ellipse réelle si l'on a : $a + b < 3c$ et imaginaire dans le cas contraire; elle est le cercle inscrit, lorsque $a + b = 3c$. L'équation de ces trois courbes est facile à obtenir; celle qui a F_c, F'_c pour foyers par exemple, est

$$a^2(b-c)^2\alpha^2 + b^2(a-c)^2\beta^2 + c^4\gamma^2 - 2c^2b(a-c)\beta\gamma - 2c^2a(b-c)\alpha\gamma - 2ab(b-c)(a-c)\alpha\beta = 0,$$

ou

$$\sqrt{a(b-c)\alpha} + \sqrt{b(a-c)\beta} + c\sqrt{\gamma} = 0.$$

(A suivre.)

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite,* voir p. 34).

3. Points inverses (M, M_2). — Étant donné un point M (x, y, z) dans le plan du triangle de référence, nous appellerons *point inverse de* M (*) et nous noterons par la lettre M_2 (**) un point (x_2, y_2, z_2) dont les coordonnées normales vérifient les formules :

$$xx_2 = yy_2 = zz_2,$$

qui deviennent en coordonnées barycentriques :

$$\frac{\alpha\alpha_2}{a^2} = \frac{\beta\beta_2}{b^2} = \frac{\gamma\gamma_2}{c^2}.$$

Ces points sont ainsi dénommés parce que les coordonnées normales de l'un des points sont proportionnelles aux inverses des coordonnées de l'autre.

On a donné, des points inverses, un grand nombre de propriétés ; voici les principales (***) :

(*) Les points inverses ont reçu différents noms : Ils ont été appelés *points arguésiens* et points *conjugués isogonaux* par M. Neuberg (*M.* 1881, p. 154); *points réciproques* et *points correspondants* par M. H. Brocard (*A. F.* Alger 1881. Rouen 1883) ; *points confocaux,* par quelques auteurs anglais; *points conjugués par droites symétriques*, par M. Schoute. Ces dénominations ne sont plus usitées et le terme de *points inverses* créé par M. le colonel Mathieu (*N. A. M.* 1865, p. 393) est aujourd'hui le seul employé.

(**) Nous verrons en traitant des points réciproques (§ 7) la raison de cette notation.

(***) On peut consulter sur les points inverses :

STEINER. — (*A. G.* t. XIX, p. 37) *Gesammerte Werke*, t. 1 ; p. 191.

J. A. MATHIEU. — *Etude de géométrie comparée* (*N. A. M.* 1865, p. 393 et suivantes).

P. H. SCHOUTE. — BULLETIN DE DARBOUX, 2me série, VI et VII ; ARCHIVES NÉERLANDAISES, t. XX : *Sur la construction des courbes unicursales par points et par tangentes.*

J NEUBERG. — (*M.* 1881, p. 154). — *Mémoire sur le tétraèdre* (1884, p. 10.

H. BROCARD. — (*A. F.* Rouen 1883. Alger 1881.)

1° Les droites qui joignent les projections orthogonales de deux points inverses sur deux côtés du triangle de référence sont antiparallèles par rapport à ces côtés ;

2° Deux points inverses peuvent toujours être considérés comme les foyers d'une conique inscrite au triangle. *Réciproquement*, toute conique inscrite dans le triangle de référence, a pour foyers deux points inverses; d'où l'on conclut que :

Les projections orthogonales de deux points inverses sur les côtés de ABC, sont six points d'une même circonférence, ayant pour centre le milieu de la droite qui joint les points inverses considérés;

3° La droite qui joint deux points et celle qui joint leurs points inverses sont vues des sommets du triangle sous des angles égaux ou supplémentaires;

4° Les angles γ, γ' sous lesquels un côté BC du triangle est vu de deux points inverses satisfont toujours à l'une des quatre équations :

$$\text{tg}\,(\gamma \pm \gamma') \pm \text{tg}\, A = 0.$$

Construction des points inverses. — Pour construire le point inverse d'un point M, on prend les symétriques des droites AM, BM, CM par rapport aux bissectrices correspondantes; ces trois droites concourent au point M_2 inverse de M.

Les droites AM et AM_2, BM et BM_2, CM et CM_2 sont dites *isogonales* par rapport au triangle de référence (*J. M. E.*, 1886, p. 245).

A. Morel. — *Etude du cercle de Brocard* (*J. E.* 1883, p. 100-101.)

E. Catalan. — *Théorèmes et problèmes* (6e édit. livre II, p. 52 et 53).

G. de Longchamps. — *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 110.)

J. Casey. — *A Sequel to Euclid* (4e édit. 1886, pp. 165-167.)

E. Vigarié. — *Droites et points inverses* (*J. E.* 1885, pp. 33-36, 54-60), 76, 171, 224, 244, 248, 265, 267.)

E. Lemoine. — *Quelques questions relatives à l'étude des points inverses* (*J. S.* 1887, p. 28).

T. C. Simmons. — *Companion to weekly problem papers*, 1887. Dans cet ouvrage qui paraîtra très prochainement et qui est dû à MM. J. Milne, T. C. Simmons, R. F. Davis et Genèse, M. T. C. Simmons a résumé (chap. V, 40 pages), la géométrie du triangle avec beaucoup de clarté et une grande précision.

4. Points réciproques d'ordre p (M, M_p). — Nous appellerons, avec M. de Longchamps (*J. E.* 1886, p. 109), *points réciproques d'ordre* p et nous noterons par les lettres M, M_p deux points (α, β, γ) (α_p, β_p, γ_p) dont les coordonnées vérifient les égalités :

$$\frac{\alpha\alpha_p}{a^p} = \frac{\beta\beta_p}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_p}{c^p}, \qquad (1)$$

p désignant un nombre entier positif ou négatif. Nous allons étudier les différents points obtenus en faisant varier p (*).

5. Points réciproques d'ordre zéro (M, M_0). — Si dans les formules (1) nous faisons $p = 0$ nous avons

$$\alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0. \qquad (2)$$

Ce sont les relations qui lient les points réciproques proprement dits. Ces points, que nous désignerons par les lettres M, M_0 (**), ont été imaginés par M. de Longchamps pour servir de base à une méthode de transformation nouvelle et il les a appelés points réciproques (*Sur une nouvelle méthode de transformation en geométrie*, *A. E. N.*, 1866, p. 321-325). Nous conserverons cette dénomination en convenant de dire *points réciproques* simplement, quand nous aurons en vue les *points réciproques d'ordre zéro.*

Construction des points réciproques d'ordre zéro. — Pour construire le point M_0 réciproque de M, on joint AM et l'on prend le *point isotomique* M'_0 de M', c'est-à-dire le point M'_0 symétrique de M' par rapport au milieu de BC. La droite AM'_0 et les droites analogues issues des deux autres sommets de ABC concourent au point M_0 cherché.

Les formules (2) très simples qui lient entre eux les points

(*) Pour la partie concernant les points réciproques des différents ordres, on peut se reporter aux *Généralités sur la géométrie du triangle*, par M. de Longchamps (*J. E.*, 1886, pp. 109-114, 127-129.)

(**) M. Neuberg avait proposé d'appeler *points conjugués isotomiques* (M., p. 150) les points réciproques d'ordre zéro; depuis, M. Neuberg s'est rallié à ce dernier terme. On appelle maintenant, comme l'a proposé M. de Longchamps, *points isotomiques* deux points qui, sur un même côté du triangle de référence, sont symétriques par rapport au milieu de ce côté.

réciproques, ont été retrouvées dans d'autres cas, notamment dans la transformation arguésienne de M. Saltel (*); mais la priorité nous paraît acquise à M. de Longchamps qui, au Congrès du Havre (*A. F.*, 1877) l'a réclamée en sa faveur.

Les points réciproques possèdent beaucoup de propriétés (**); nous indiquerons les principales en parlant des droites et des triangles associés à ces points.

6. Points réciproques du premier ordre (M, M_1). — Ces points qui n'ont pas encore été étudiés et dont les coordonnées barycentriques vérifient les égalités

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a} = \frac{\beta\beta_1}{b} = \frac{\gamma\gamma_1}{c}$$

ont été imaginés par M. de Longchamps (*J. E.*, p. 112-114).

Construction des points réciproques du premier ordre. — *1° Méthode de M. de Longchamps.* — On joint AM et l'on fait passer une circonférence par les points A, M′ et par le point où la bissectrice extérieure de l'angle A coupe le cercle circonscrit à ABC. Cette circonférence coupe BC en un second pont M'_1 (***). La droite AM'_1 et les analogues issues de B, C, concourent au point M_1 réciproque du premier ordre de M.

2° Méthode de M. Neuberg (*J. E.* 1886, p. 113). — On prend sur AB et AC des longueurs AH, AK respectivement égales ou proportionnelles à BM′, CM′. La droite qui joint A au milieu de HK et les deux analogues concourent encore au point M_1 réciproque du premier ordre de M.

7. Points réciproques du second ordre (M, M_2). —

(*) On peut consulter *Sur la transformation arguésienne:* Philippin. (*N. C. M.* I. 1874-1875, p. 127). — Saltel. *Divers Mémoires sur le principe arguésien.* (*Mémoire in-8° de l'Académie royale de Belgique*, t. XII et XIII).

(**) Voir sur ce sujet : G. de Longchamps. *Sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie* (*A. E. N.* III, 1886, p. 321-325). *Essai sur la géométrie de la règle* (*J. E.* 1885, pp. 61-66). *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 110). — Schoute (*B. M.* (2) VI. 1882, p. 159), indique (§§ 11-12) la méthode de transformation par *points réciproques* et sa différence avec celle par *points inverses*.

(***) Comparez avec la question donnée au concours général de mathématiques élémentaires (année 1885).

Les formules (1), pour $p = 2$, deviennent

$$\frac{\alpha\alpha_2}{a^2} = \frac{\beta\beta_2}{b^2} = \frac{\gamma\gamma_2}{c^2}.$$

Elles montrent que les points M, M_2 ne sont autres que les *points inverses* dont nous avons indiqué la construction et les principales propriétés (§ 3). Bien que ces points rentrent complètement dans la théorie générale des points réciproques du second ordre, nous leur conservons, à cause de leur importance, le nom de *points inverses* et nous les notons par les lettres M, M_2.

Nous allons indiquer maintenant, comment on peut construire le point réciproque, d'un ordre quelconque, correspondant à un point donné.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. NEUBERG.

Sur le tracé des tangentes. — La construction de la tangente à certaines courbes, d'après la méthode de M. Godefroy *(J. M. S.* 1885, p. 200; *Schoute, sur la construction de courbes unicursales)* peut être généralisée dans les termes suivants.

Soit M un point mobile, faisant partie d'une figure variable dont les points A, B,... sont assujettis à glisser sur les courbes fixes (A), (B), .. et dont les droites *a*, *b*,... roulent sur des courbes fixes (*a*), (*b*),... Pour trouver, à un moment donné, la tangente à la trajectoire du point M, on peut supposer que les points A, B,... se déplacent sur les tangentes correspondantes des courbes (A), (B),.. et que les droites *a*, *b*,... tournent autour de leurs points de contact actuels avec les lignes (*a*), (*b*),.. Dans ces nouvelles conditions, il arrive souvent que le point M décrit une conique. Si les éléments principaux (centre, foyers, asymptotes, directrice...) de la conique ne sont pas immédiatement connus, on détermine la tangente en M en cherchant, soit quatre nouvelles positions

du point M sur la conique, soit deux positions de M et les tangentes correspondantes.

Prenons, par exemple, la *Kreuzcurve* traitée p. 202 (*). Pour trouver la tangente en M, nous faisons tourner la droite PQ autour du point μ considéré comme fixe. D'après un théorème assez connu, le point M décrit alors une hyperbole dont les asymptotes sont les parallèles à OP, OQ, menées par μ; donc la tangente en M est symétrique de la droite $M\mu$ par rapport à MP. Pour raisonner *directement*, on observera que la droite mobile autour de μ détermine sur OP, OQ, deux divisions homographiques; donc les droites PM, QM sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques dont les sommets sont les points Y_∞, X_∞ à l'infini sur OQ et OP, et le lieu de Q est une conique passant par Y_∞, X_∞. Les tangentes en ces points (ou les asymptotes) sont les positions des rayons PM, QM qui correspondent aux cas où M est confondu avec Y_∞ ou X_∞; ce sont donc les droites μY_∞ et μX_∞. Nous connaissons ainsi trois points M, Y_∞, X_∞ de la conique et les tangentes aux deux derniers points. Le triangle $MY_\infty X_\infty$ doit être homologique avec celui des tangentes en ses sommets, ce qui permet de construire la tangente en M.

Sur la détermination du point de contact d'une droite mobile, avec son enveloppe. — Le principe énoncé ci-dessus s'applique aussi à ce nouveau problème. Comme application, nous choisissons l'exemple de la page 201 (voir la figure). Lorsque le point M, au lieu de glisser sur U, se déplace sur la tangente TMT' (T' désigne le point de rencontre avec OY), la droite PQ enveloppe une parabole touchant OX en T, OY en T'; par conséquent, les droites PT', QT et celle qui joint O au point de contact μ de QP avec son enveloppe, concourent en un même point (**).

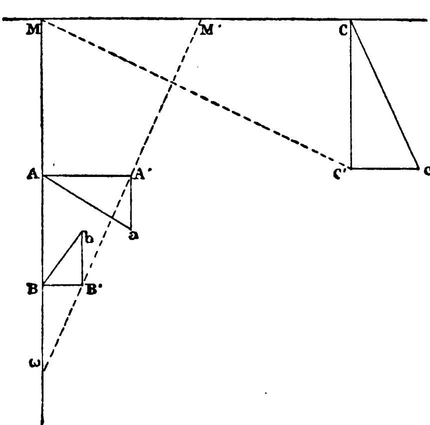
Au lieu de se baser sur une propriété connue, on peut observer que les points M, P, Q marquent sur MT, OX, OY

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure de la p. 202 (*Journal*, 1886).

(**) La lettre de M. Neuberg est antérieure à la publication de la note de M. d'Ocagne sur ce problème (*J. M. S.* 1886, p. 256), mais le défaut d'espace nous a empêché de la publier plus tôt. G. L.

des divisions homographiques semblables ; donc PQ enveloppe une conique touchant OX, OY aux points qui correspondent au point O considéré comme une position particulière de Q ou P.

On peut encore résoudre la question au moyen de la règle suivante qui est la corrélative de celle de Roberval ou de celle du quadrilatère des vitesses : Si l'on connaît les vitesses Aa, Bb de deux points A, B, d'une droite mobile d, cherchez-en les composantes AA′, BB′ normales à d ; la droite A′B′ coupera d en un point C qui est le point de d avec son enveloppe. En effet, le déplacement infiniment petit de d résulte d'un glissement de cette droite sur elle-même et d'une rotation autour de son point de contact avec l'enveloppe ; donc les extrémités des composantes, normales à d, des vitesses de ses différents points sont sur une droite passant par ce point de contact. Cette conclusion n'est pas infirmée, lorsque les points considérés A et B n'ont pas une distance invariable ; car dans ce cas, il faut leur supposer sur d une vitesse de glissement indépendante de celle qui résulte du glissement général de d.



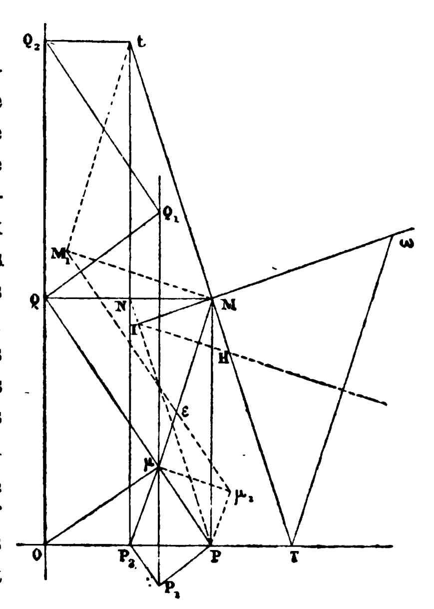
Appliquons cette règle à la courbe de la page 201. Si la vitesse de M sur U est représentée par MT, les composantes MP (ou QO) et PT figurent les vitesses des points Q et P, qui déterminent la droite mobile PQ. Soient QQ′ et PP′ les projections de QO et PT sur les perpendiculaires élevées en Q et P sur PQ ; la droite Q′P′ détermine le point cherché μ.

Sur la détermination du rayon de courbure. — Soit M un point décrivant une courbe (M). Supposons qu'on parvienne à déterminer la vitesse MM′ de ce point sur sa trajectoire, ainsi que la vitesse Aa d'un point A de la normale. Alors, si

AA′ est la projection de Aa sur la perpendiculaire élevée en A sur MA, le point de rencontre ω des droites MA, M′A′ sera le centre de courbure de la courbe (M); car c'est le point de contact de la normale MA avec son enveloppe.

Il arrive souvent qu'avec la vitesse de M, on connaisse aussi la vitesse Cc d'un point C de la tangente MM′. Dans ce cas, soit CC′ la composante de Cc perpendiculaire à MC; les droites Mω, MC ayant même vitesse angulaire, les triangles ωMM′, MCC′ sont semblables, d'où l'on conclut que M′ω est perpendiculaire à MC′.

Appliquons ces notions à la *Kreuzcurve* Représentons par μP la vitesse de μ sur la circonférence O; l'angle μOP figurera la vitesse angulaire de la normale Oμ (*). Menons par μ une perpendiculaire P_1Q_1 à OP; l'angle $P\mu P_1$ indiquera la vitesse angulaire de la tangente PQ. La rotation de PQ autour de μ communique aux points P,Q des vitesses PP_1, QQ_1 perpendiculaires à PQ et limitées à $Q_1\mu P_1$; mais ce ne sont là que des composantes des vitesses totales de P et Q dirigées suivant OP et OQ. Donc il reste à tirer P_1P_2 et Q_1Q_2 parallèles à PQ, pour avoir les vitesses totales. Les points P et Q entraînent avec eux les droites PM, QM; il résulte de là que la vitesse de M est la diagonale Mt du rectangle construit sur les droites $MN = PP_2$, $Nt = QQ_2$. On voit facilement que $QQ_2 = OQ$ et que Mμ passe par P_2;



(*) Il serait plus exact de dire que la vitesse angulaire est mesurée par tang μ OP.

donc Mt, parallèle à PN est symétrique de MP_2 par rapport à MP, et l'on pourrait encore obtenir la tangente en M en prenant $PT = PP_2$ et joignant M à T.

Déterminons maintenant la vitesse angulaire de la tangente Mt, ou celle de la droite $M\mu$ qui lui est égale. Nous connaissons les vitesses μP, Mt de deux points de $M\mu$; soient $\mu\mu_1$, MM_1 leurs projections sur des perpendiculaires à $M\mu$, et ε le point de rencontre des lignes $\mu_1 M_1$, μM. ε sera le point de contact de la droite $M\mu$ avec son enveloppe, et l'angle $\mu\varepsilon\mu_1$ indique la vitesse angulaire de $M\mu$. Donc si l'on fait l'angle $Mt\omega$ ou $MT\omega$ égal à $\varepsilon\mu_1\mu$, le second côté de cet angle coupe la perpendiculaire élevée en M sur Tt au centre de courbure ω de la Kreuzcurve.

On voit facilement que $\mu\mu_1$ égale la hauteur MI du triangle MNP (ou celle de MPP_2), et que MM_1 est le double de cette hauteur. Par conséquent $\mu\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon M$; ce qui conduit à ce théorème assez curieux :

Les droites qui joignent les points correspondants de la Kreuzcurve et du cercle générateur O, *sont divisées dans un rapport constant* 2 : 1 *par leur enveloppe.*

Pour construire le point ω, il suffit de mener MI perpendiculaire à NP, de prendre sur MT une longueur $MH = \frac{1}{3} M\mu$ et d'abaisser la perpendiculaire $T\omega$ à la droite IH.

La longueur du rayon de courbure est donnée par la formule

$$M\omega = \frac{MT.M\mu}{3MI}.$$

Extrait d'une lettre de M. H. Brocard.

Voici, au sujet du *folium double* (*J. M. S.* 1886, p. 251) et du *trifolium droit* (*ibid.* p. 254) quelques remarques très simples ; j'ignore si elles sont nouvelles.

Ces deux courbes sont les podaires de deux points de l'axe d'une hypocycloïde à trois rebroussements.

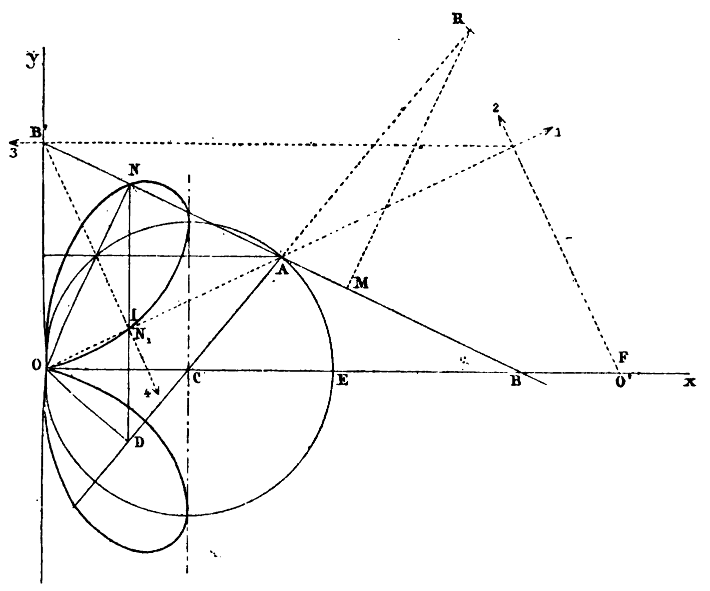
Cette propriété est une conséquence de la définition géomé-

trique de cette hypocycloïde comme enveloppe d'une droite obtenue en menant, de chaque point A d'une circonférence, une droite BAB' faisant avec un diamètre fixe OCB le même angle que la corde OA.

Le point de contact M de la droite BAB' avec son enveloppe s'obtient en projetant sur BAB' l'extrémité R du rayon CA prolongé d'une longueur AD double de AC (*Bulletin de la Société math. de France*, t. 1, 1873, p. 224-226).

Le cercle C est tangent intérieurement à l'hypocycloïde ; OCB est un axe de symétrie de cette courbe, et si l'on prend OF = 2. OE = 4. OC = $4a$, le point O est son sommet, C son centre, et F un point de rebroussement.

Cela posé, le *folium double* N est la podaire du point O, et le *trifolium droit* N' est la podaire du point E.



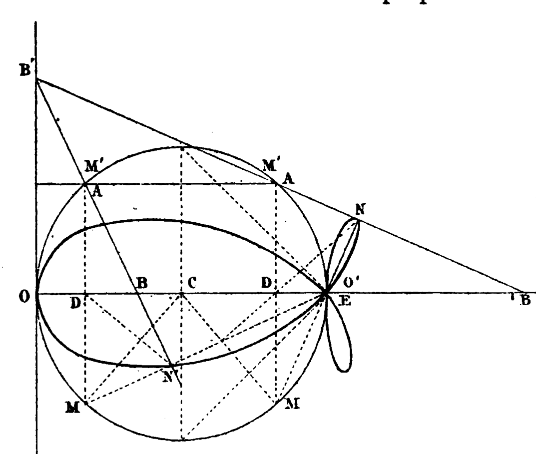
Joignant N et N' au milieu de OM, on a la normale à ces podaires en N et N'.

La figure 108 (*) se transforme alors ainsi, et le point N

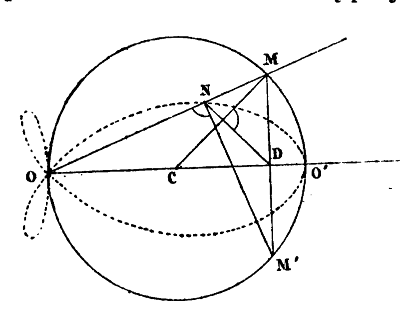
(*) *Journal*, 1886; p. 251.

s'obtiendra en menant OD perpendiculaire à AC, puis DN parallèle à OY, jusqu'à sa rencontre avec BAB'.

De même, la figure 112 (*) pourra être ainsi modifiée: projeter M en D sur OO' et mener DN perpendiculaire à CM, jusqu'à sa rencontre avec O'M, ou recouper O'M par un arc de cercle ayant D pour centre et DM pour rayon.



Ces indications suffisent pour la solution complète de la question 346 que j'ai proposée dans *Mathesis* (Etudier les podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements, le point fixe étant pris sur l'un des axes de l'hypocycloïde, t. IV, 1884, p. 143).



Je ne puis affirmer qu'elles ajoutent quelque chose au paragraphe cité de votre *Traité de Géométrie analytique* (p. 512), ni aux résultats que vous avez réservés au § 130 (*loc. cit.*, p. 281). Je vous les communique donc, à tout hasard.

Enfin, le *trifolium équilatéral*, podaire du point C, donne lieu à une remarque intéressante. Cette courbe est formée de trois boucles égales, et les extrémités A'A″ de deux cordes rectangulaires C'A, CA″ sont à une distance constante A'A″ égale au rayon AC (propriété évidente).

(*) *Journal*, 1886; p. 254.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales
au lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 44.)

II

L'infiniment petit n'est ni une quantité déterminée, ni un zéro, mais une variable qui tend vers zéro, en *restant* constamment inférieure à une quantité donnée ε aussi petite que l'on voudra. C'est un cas particulier de la variable qui a une limite. Les infiniment petits qui interviennent dans les applications du calcul différentiel sont les variations de certaines grandeurs, ou, comme on dit, les accroissements positifs ou négatifs de ces grandeurs. Quand on veut étudier la loi d'un phénomène quelconque, il est souvent commode de donner aux variables d'où dépend le phénomène des accroissements finis, de chercher une relation entre eux, et d'en déduire, en les faisant tendre vers zéro, celle qui relie les éléments du phénomène lui-même. Cela revient en somme à se placer, pour résoudre un problème, dans des conditions différentes de celles que définit l'énoncé, mais qui, suivant la loi de variation continue des éléments qui interviennent dans la question ont pour limites celles du problème.

La relation a établir entre les accroissements finis des variables est une question qui peut présenter telle ou telle difficulté, mais qui en tous cas rentre dans le cadre de l'algèbre élémentaire. Le calcul différentiel donne un ensemble de notations et de règles générales permettant d'en déduire le plus rapidement et le plus simplement possible ce qu'on

peut appeler *la relation limite*, en ce sens qu'elle répond au cas limite de celui qui a fourni la première relation.

Prenons un exemple. Soit à déterminer la tangente en un point M d'une courbe. C'est, par définition, la position limite d'une droite tournant autour du point M de façon qu'un deuxième point de rencontre avec la courbe M′ se rapproche indéfiniment du premier. A la tangente substituons une sécante voisine, MM′, c'est-à-dire une droite faisant avec la tangente un angle infiniment petit. (Cela ne signifie pas un angle tout petit, moindre par exemple qu'un millième de seconde, encore moins un angle nul, mais un angle variable qui va tendre vers zéro).

Un point M de la courbe sera défini, pour simplifier, à l'aide de deux axes rectangulaires ox, oy, par son x, OP, et son y, MP; et la courbe elle-même sera définie par une relation donnée entre l'x et l'y d'un quelconque de ses points. Si un mobile qui la décrit passe de M en M′, son x augmente de PP′ ou de MQ, son y augmente de MQ. α désignant l'angle que fait la droite mobile MM′ avec la parallèle à ox Mx', le triangle rectangle MM′Q nous donne

$$M'Q = MQ.\text{tg}\,\alpha$$

M′Q, MQ, les accroissements des éléments x et y se désignent par Δx, Δy. La relation précédente s'écrira donc

$$\Delta y = \Delta x.\text{tg}\,\alpha$$

ou

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, c'est-à-dire lorsque M′ se rapproche indéfiniment de M, Δy tend aussi vers zéro si la fonction y est continue; l'angle α a pour limite l'angle α_1, que fait la tangente avec Mx'. Supposons que le raport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ait une certaine limite K, nous écrirons, pour déterminer α_1, la relation

$$\text{tg}\,\alpha_1 = K.$$

Ainsi, soit $y = x^2$, l'équation de la courbe, nous trouverons

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 2x \text{ (*)}.$$

Reprenons maintenant le même problème, et, sans rien changer au fond de la solution, tâchons d'introduire le langage du calcul différentiel. Nous avons trouvé :

$$\Delta y = \operatorname{tg} \alpha . \Delta x,$$

$\operatorname{tg} \alpha$, ayant pour limite $\operatorname{tg} \alpha_1$ peut se désigner par $\operatorname{tg} \alpha_1 + \varepsilon$, ε étant alors une variable qui tendra vers zéro. La relation précédente devient

$$\Delta y = (\operatorname{tg} \alpha_1 + \varepsilon) \Delta x$$

ou, en appliquant à notre exemple,

$$2x\Delta x + \Delta x^2 = \operatorname{tg} \alpha_1 . \Delta x + \varepsilon \Delta x \qquad \text{(A)}$$

Si, pour essayer d'en tirer « la relation limite », on faisait simplement tendre Δx vers zéro, on obtiendrait zéro pour la limite de chaque expression, et on serait conduit à écrire

$$0 = 0,$$

ce qui est juste évidemment, mais n'apprend rien.

Mais considérons attentivement la composition des deux membres de (A). Dans le premier, figure la somme de deux infiniment petits $2x\Delta x$ et Δx^2 de nature essentiellement distincte : le rapport du premier à Δx, ou $2x$, n'est plus un infiniment petit, tandis que le rapport du second à Δx, ou Δx est encore un infiniment petit. Le second membre est composé de la même manière.

Dès lors, si on forme les rapports à Δx des deux membres de (A), et qu'on en cherche la limite, les éléments Δx^2 et $\varepsilon . \Delta x$ ne donnent rien, et en écrivant que les limites sont égales, on aura

$$2x = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Mais alors, on le voit, il était plus simple, au lieu d'écrire l'égalité (A), d'écrire seulement

$$2x\Delta x = \operatorname{tg} \alpha_1 . \Delta x \qquad \text{(B)}$$

Cela revient à prendre tout de suite l'angle α_1 qui corres-

(*) En demandant de déterminer la position de la tangente à une courbe en un point, on suppose que la tangente ou la position limite de la sécante variable existe. Cette existence est démontrée précisément par le fait que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\operatorname{tg} \alpha$, et par suite α, a une limite.

pond à la tangente, à la condition de substituer en même temps à Δy l'élément $2x.\Delta x$. Cet élément est la *différentielle* de y. On voit qu'elle en est la définition : l'accroissement Δy qui correspond à l'accroissement Δx de la variable arbitraire est la somme de deux parties : l'une, dont le rapport à Δx ne tend plus vers zéro, l'autre dont le rapport à Δx est encore infiniment petit. C'est la première qui est la différentielle. Un calcul élémentaire dont on peut avoir quelque idée par l'exemple précédent donne les différentielles des diverses fonctions de x. Ainsi d'une manière générale, on établit que x^n a pour différentielle $nx^{n-1}\Delta x$; en particulier, celle de x^2 est $2x\Delta x$. La différentielle de y se représente par le symbole *dy*. Si on remarque que, d'après la définition même, la différentielle de x coïncide avec l'accroissement de x, ou que $\Delta x = dx$, la relation (B) peut s'écrire

$$dy = \operatorname{tg}\alpha_1 . dx.$$

Et nous avons là ce qu'on appelle une équation différentielle. C'est la relation entre les différentielles, au lieu de la relation entre les accroissements. C'est celle qu'un mathématicien eût écrite immédiatement, et voici enfin, en deux mots, le raisonnement tel que l'eût donné la méthode de Leibniz :

La tangente est la droite qui joint deux points infiniment voisins M et M'. Soit α_1 l'angle qu'elle fait avec Mx', le triangle M'QM donne

$$M'Q = \operatorname{tg}\alpha_1 . MQ$$

ou

$$dy = \operatorname{tg}\alpha_1 . dx.$$

Si $y = x^2$, $dy = 2xdx$; on a donc finalement $2x = \operatorname{tg}\alpha_1$.

Au fond, on le voit, il n'y a là qu'un langage nouveau pour une suite d'idées toutes naturelles.

(A suivre.)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4460-7.

SUR LA RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE
DE L'ÉQUATION $x^3 + px + q = o$.

Par M. **B. Niewenglowski.**

On *vérifie*, dans tous les cours de mathématiques spéciales, que, p et q étant réels et satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0,$$

les racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0, \qquad (1)$$

sont proportionnelles à celles de l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{b}{4} = 0, \qquad (2)$$

dans laquelle b désigne un nombre compris entre -1 et $+1$.

Je me propose de donner, de cette proposition, une démonstration *à priori*.

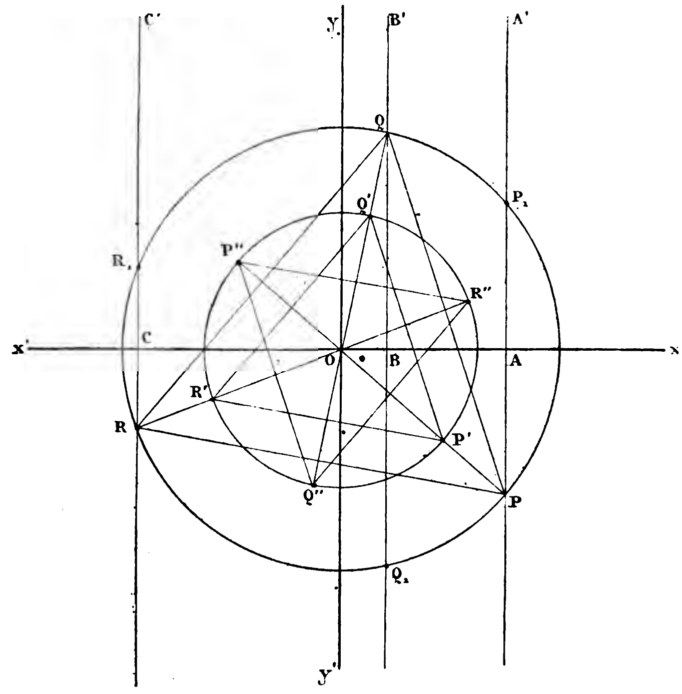
Soient x_1, x_2, x_3 trois nombres réels, inégaux et vérifiant la condition

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \qquad (3)$$

Ces nombres sont les racines d'une équation de la forme (1). Traçons deux axes rectangulaires $x'x$, $y'y$; et, en supposant, pour fixer les idées, x_1 et x_2 positifs, prenons $OA = x_1$, $OB = x_2$, $OC = x_3$, puis menons les droites AA′, BB′, CC′ parallèles à $y'y$. Cela posé, on sait construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois droites parallèles, et l'on peut se donner arbitrairement la position d'un sommet. Dans ces conditions, le problème a deux solutions, et le centre de chacun des triangles obtenus est, à cause de la relation (3), situé sur $y'y$. Il est évident qu'on peut, dès lors, se donner, sur cette droite $y'y$, la position du centre et déterminer deux triangles équilatéraux PQR, $P_1Q_1R_1$ symétriques par rapport à l'axe des x.

Cela fait, construisons un triangle P′Q′R′ homothétique au triangle PQR et inscrit à un cercle de rayon égal à l'*unité*.

Si l'on fait la même transformation pour le triangle $P_1 Q_1 R_1$, on obtiendra un triangle symétrique de $P' Q' R'$ par rapport à l'axe des x. Il est évident que le triangle $P'Q'R'$ et son symétrique correspondent à une équation de la forme (2). Si α



désigne l'angle de OP (par exemple) avec ox, les distances des sommets P', Q', R' à $y'y$ sont, respectivement,

$$\cos\alpha, \quad \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right).$$

ou, en posant $3\alpha = a$,

$$\cos\frac{a}{3}, \quad \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right);$$

et, par suite,

$$x_1 = \lambda\cos\frac{a}{3}, \quad x_2 = \lambda\cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right), \quad x_3 = \lambda\cos\left(\frac{a}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),$$

λ ayant la valeur $\dfrac{OP}{OP'}$.

Si donc on prend $b = \cos a$, les racines de l'équation (1) seront proportionnelles à celles de l'équation (2).

Mais il convient de remarquer qu'on aurait pu construire le triangle P″Q″R″, homothétique inverse du triangle PQR; dans ce cas, il suffit de remplacer α par $\alpha - \pi$ et de prendre

$$b' = -b \quad \lambda' = \frac{OP}{OP''} = -\frac{OP}{OP'} = -\lambda.$$

On retrouve bien ainsi, par des considérations de géométrie élémentaire, toutes les circonstances que présente le calcul.

On peut encore remarquer que le rayon R du cercle circonscrit au triangle PQR est déterminé par l'équation

$$R^2 = -\frac{2}{3}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1);$$

ce qui donne $R^2 = -\frac{2p}{3}$, et, par suite,

$$\lambda = \sqrt{-\frac{2p}{3}}.$$

NOTE SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx$$

Par M. **J. Berthon,** élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

Dans le numéro de décembre 1885 de ce journal (p. 279), à propos de la quadrature des pyriformes. M. de Longchamps évalue géométriquement l'intégrale définie

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx.$$

Nous nous proposons ici de la déterminer analytiquement.

Le produit $x(a-x)$, x variant de zéro à a, est positif, part de zéro, croît, puis revient à zéro, sa valeur maximum étant d'ailleurs $\frac{a^2}{4}$ pour $x = \frac{a}{2}\cdot$ Je puis donc poser :

$$x(a - x) = \frac{a^2}{4} \sin^2 \varphi; \tag{1}$$

φ variant de o à π, quand x varie de o à a.

De (1), on tire

$$x = \frac{a}{2}[1 \pm \cos \varphi] \qquad dx = \mp \frac{a}{2} \sin \varphi d\varphi.$$

On a donc :

$$\frac{1}{b}\int_0^a x\sqrt{x(a-x)}dx = \mp \frac{a^3}{8b}\int_0^\pi \sin^2 \varphi[1 \pm \cos \varphi]d\varphi.$$

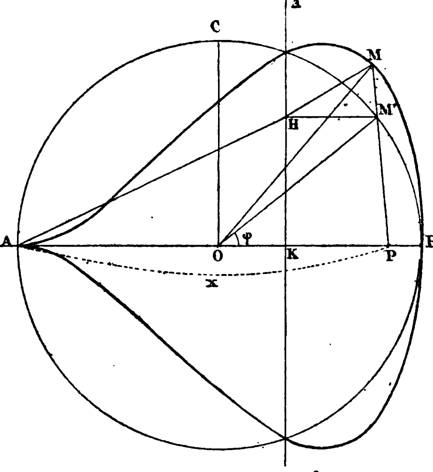
Or,

$$\int \sin^2 \varphi (1 \pm \cos \varphi)d\varphi = \int \sin^2 \varphi d\varphi \pm \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \int \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \pm \int \sin^2 \varphi d \sin \varphi$$

$$= \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \pm \frac{\sin^3 \varphi}{3} + c.$$

Déterminant la constante c de façon que l'intégrale s'annule pour $\varphi = 0$; on trouve $c = 0$.



Nous aurons donc, finalement,

$$\pm \frac{a^3}{8b}\int_0^\pi \sin^2 \varphi [1 \pm \cos\varphi]d\varphi = \mp \frac{\pi a^3}{16b}.$$

Prenant le signe +, et doublant pour avoir l'aire de la courbe toute entière, nous avons, pour l'expression de l'aire des pyriformes, la quantité $\frac{\pi a^3}{8b}$ (*).

(*) J'ai dit, par erreur (p. 280; l. 24) $\frac{\pi a^3}{2b}$; il faut lire $\frac{\pi a^3}{8b}$, comme le trouve ici M. Berthon. G. L.

Cette quantité peut s'écrire $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2b}$, ce qui démontre que la surface de la pyriforme s'obtient en multipliant celle du cercle par le rapport $\frac{a}{2b}$. Si on suppose $a = b$ on retrouve le théorème démontré géométriquement par M. de Longchamps.

Remarque. — L'angle φ qui m'a servi dans l'intégration précédente a une signification géométrique très simple. Considérons un point de la pyriforme : soient x son abcisse, MP son ordonnée, M′ le point où cette ordonnée rencontre le cercle ; on a :

$$\overline{M'P}^2 = x(a - x)$$

et $M'T = \frac{a}{2}$ sin M′OB, donc M′OB $= \varphi$. L'angle φ n'est autre que l'anomalie excentrique du point du cercle ayant même abscisse que le point correspondant de la pyriforme.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 58).

8. — Problème I. *Sachant trouver le point* M_p, *réciproque d'ordre* p *de* M, *construire le point* M_{-p} *réciproque d'ordre* — p *de* M.

On prend :

1° Le réciproque M_o de M ;

2° Le réciproque $M_{o,p}$ d'ordre p de M_o

3° Le proint réciproque $M_{o,p,o}$ de $M_{o,p}$.

Le point $M_{o,p,o}$, ainsi obtenu, n'est autre que le point M_{-p} cherché.

9. — Problème II. *Sachant trouver le point* M_p *réciproque d'ordre* p *de* M, *construire le point* M_{p+2} *réciproque d'ordre* (p+2) de M.

On prend :

1° Le réciproque $M_{p,o}$ de M_p ;

2° Le point inverse $M_{p,o,2}$ de $M_{p,o}$.

Le point $M_{p,0,2}$ est le point réciproque M_{p+2} d'ordre $(p+2)$ cherché.

10. — PROBLÈME GÉNÉRAL. *Construire le point réciproque* M_p *d'ordre* p *quelconque (positif ou négatif) correspondant à un point donné* M.

Nous savons construire directement les points réciproques d'ordres 0, 1, 2 ; en appliquant le problème II aux points réciproques d'ordre 0 ou 2, nous obtenons tous les points réciproques d'ordre pair ; en l'appliquant aux points réciproques du premier ordre, nous avons les points réciproques d'ordre impair. Le problème I donnant les points réciproques d'ordre négatif, nous pouvons donc construire facilement les points réciproques d'un ordre quelconque.

11. Coordonnées des points réciproques d'ordre quelconque. — Les coordonnées barycentriques d'un point M étant (α, β, γ) celles des points M_0, M_1, M_2..., M_p réciproques des différents ordres seront respectivement :

$$\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right); \quad \left(\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}\right); \quad \left(\frac{a^2}{\alpha}, \frac{b^2}{\beta}, \frac{c^2}{\gamma}\right) \cdots \left(\frac{a^p}{\alpha}, \frac{b^p}{\beta}, \frac{c^p}{\gamma}\right).$$

On voit immédiatement qu'on peut obtenir les points réciproques d'ordres pairs positifs et négatifs en partant de M et en prenant alternativement le point réciproque et le point inverse du point précédent ; on a, en effet :

$$M_{0,2,0,2,0} = M_{-4} \qquad M_{0,2,0,2,0,2,0} = M_{-6}$$
$$M_{2,0,2} = M_4 \qquad M_{2,0,2,0,2} = M_6.$$

En général (*).

$$M_{0,2,0,2,0,2\ldots,0} = M_{-2p} \qquad M_{2,0,2,0,2,0\ldots,2} = M_{2p}.$$

D'une manière générale on a :

$$M_{m,n,p\ldots,q,r,s} = \begin{cases} M_{s-r+q-\ldots,\pm p\mp n\pm m} & \text{quand le nombre des transformations est } \textit{impair}; \\ \text{ou bien :} & \\ M_{0,s-r+q-\ldots,\pm p\mp n\pm m} & \text{quand le nombre des transformations est } \textit{pair}. \end{cases}$$

(*) Comparez : J. Neuberg, *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884, p. 15.

12. Potentiels d'ordre *p*, associés d'un point donné. — Nous dirons avec M. Neuberg qu'un point M^p $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ est le potentiel d'ordre *p* associé d'un point donné M (α, β, γ) lorsque les égalités

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

et

$$\frac{\alpha_p}{A^p} = \frac{\beta_p}{B^p} = \frac{\gamma_p}{C^p}$$

sont vérifiées.

On peut construire directement les *potentiels d'ordre* p *associés à un point donné* en employant une méthode générale (*J.E.* 1886, p. 177-179). Mais cette construction étant un peu longue, nous allons indiquer des constructions particulières pour les potentiels des premiers ordres associés à un point M (*).

13. Construction du deuxième potentiel associé à un point M. — On prend le point M'_0 symétrique de M' par rapport au milieu de BC et par C on mène une droite qui coupe AB, AM, AM'_0 respectivement en R, P, N, de telle façon que :

$$CN = NR.$$

Par le point P on mène une parallèle à AB qui coupe BC en V. La droite AV et les deux analogues concourent au point M^2 cherché (**).

14. Potentiels proprement dits. — Le cas particulier où

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

présente un intérêt spécial dans la géométrie du triangle. Les points potentiels qui correspondent à ce cas sont les *potentiels proprement dits.*

Si nous remarquons que les coordonnées $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ du centre

(*) Pour tout ce qui concerne les points potentiels, on peut consulter le mémoire de M. G. de Longchamps, *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 177-179, 198-206).

(**) Voir deux autres constructions (*loc. cit.*, 199-201).

de gravité sont égales, les égalités

$$\frac{\alpha}{a^p} = \frac{\beta}{b^p} = \frac{\gamma}{c^p} \text{ peuvent s'écrire } \frac{\alpha\alpha_0}{a^p} = \frac{\beta\beta_0}{b^p} = \frac{\gamma\gamma_0}{c^p}.$$

Elles montrent que *les potentiels proprement dits d'ordre* p *sont les réciproques d'ordre* p *du centre de gravité* G. Pour ce motif, nous appellerons simplement ces derniers, *potentiels d'ordre* p et nous les noterons par la lettre G avec un indice indiquant l'ordre de réciprocité (*).

Nous allons encore construire les potentiels proprement dits du troisième et du quatrième ordre.

15. Construction du troisième potentiel (G_3). — Le troisième potentiel s'obtient en prenant :

1° Le réciproque du centre du cercle inscrit;

2° L'inverse de ce réciproque.

16. Construction du quatrième potentiel (G_4). — La position de ce point s'obtient en prenant :

1° Le réciproque du point de Lemoine;

2° L'inverse de ce point.

17. — La détermination des points réciproques et des points potentiels revient à ce problème.

Trouver sur l'un des côtés d'un triangle un point qui le divise proportionnellement aux p^mes^ *puissances des côtés adjacents.*

Cette question a été résolue par plusieurs géomètres qui en ont donné des solutions très diverses (**) et le lieu des

---

(*) Il faut bien observer que le *potentiel d'ordre* p, *associé d'un point donné* (A, B, C), est celui dont les coordonnées sont (A^p,B^p,C^p) : le mot plus simple *potentiel d'ordre* p (sans autre qualificatif) désigne le *potentiel proprement dit*, point qui a pour coordonnées (a^p, b^p, c^p); *a, b, c* étant les longueurs des côtés du triangle de référence.

(**) Consulter :

A. Peyronny. — *Construction géométrique du rapport* $\frac{a^p}{b^p}$ (*N. A. M.*, (2) III, 1844, pp. 371-374).

Poudra. — *Problème sur les côtés d'un triangle élevés à des puissances données.* (*N. A. M.* (1), XVI, 1856, pp. 217).

H. Brocard. — *Étude sur un nouveau cercle du plan du triangle* (*A. F.*, Alger, 1881, p. 150).

points du plan du triangle, tels que les droites qui joignent les sommets à ces points divisent les côtés opposés en segments proportionnels aux $p^{\text{ièmes}}$ puissances des côtés adjacents, est généralement une courbe transcendante que M. de Longchamps appelle *Potentielle triangulaire* (*M.*, 1886, pp. 246-248). Cette courbe a d'ailleurs fait l'objet de diverses recherches. M. H. Faure a donné son équation en coordonnées normales (*N. A. M.*, 1863, p. 293). M. Lemoine l'a étudiée au Congrès de La Rochelle (*A. F.*, 1882), et a donné son équation cartésienne, en prenant pour axes deux côtés du triangle, sous la forme :

$$\frac{(ay)^{\log\frac{b}{c}}}{(bx)^{\log\frac{a}{c}}} = (ab - ay - bx)^{\log\frac{b}{a}}.$$

Au Congrès de Nancy (*A. F.*, 1886), M. Lemoine a fait voir que, en coordonnées normales, cette courbe a pour équation :

$$(ax)^{\log\frac{b}{c}}.(by)^{\log\frac{c}{a}}.(cz)^{\log\frac{a}{b}} = 1$$

Enfin M. de Longchamps (*M.* 1886, p. 246) a donné son équation barycentrique sous la forme (*) :

$$\gamma^k = \alpha^{k-1}\beta.$$

Cette courbe présente des propriétés curieuses qui peuvent se résumer ainsi :

1° L'équation de la courbe reste la même en coordonnées normales et en coordonnées barycentriques.

2° La potentielle triangulaire est une courbe *anallagmatique* (**) (sens général) quand on effectue une transformation réciproque d'ordre quelconque.

E. Lemoine. — *Quelques théorèmes* (*J. S.*, 1883, p. 74) (*A. F.*, La Rochelle 1882).

M. d'Ocagne. — *Sur les propriétés segmentaires du triangle* (*N. A. M.*, (3) II, 1883. pp. 497-500).

G. Boubals. — *Problème de géométrie* (*J. E.*, 1885, pp 31-33).

G. de Longchamps. — *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.*, 1886, pp. 127-129, 203).

(*) Dans cette formule la lettre k désigne une constante qui peut être calculée par la formule $c^k = a^{k-1}b$; et, en supposant pour fixer les idées $a < b < c$, on vérifie que : $0 < k < 1$.

(**) Voir *J. S.*, 1882, p. 102.

3° Lorsque a, b, c, vérifient la relation

$$c^r = a^p b^q.$$

r, p, q, désignant trois nombres tels que

$$r = p + q, \qquad (1)$$

k devient un nombre commensurable $\left(k = \frac{r}{q}\right)$ et la potentielle devient une courbe algébrique ayant pour équation

$$\gamma^{p+q} = \alpha^p \beta^q.$$

En particulier, quand $p = q = 1$, la potentielle, comme l'a observé M. Lemoine (A. F. *Nancy*, 1886) devient une conique.

Dans l'hypothèse contraire à l'égalité (1), k est incommensurable et la potentielle est, alors, une courbe transcendante.

Dans le premier cas, elle est *unicursale;* dans le second, on peut dire qu'elle est du *genre unicursal* et, dans les deux cas, on peut la construire points par points.

4° La potentielle triangulaire passe par un grand nombre de points remarquables : centre de gravité, centre du cercle inscrit, point de Lemoine... et leurs réciproques d'ordre quelconque. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extraits de plusieurs lettres de M. CATALAN.

... L'intéressante Note de M. d'Ocagne me suggère les remarques suivantes :

1° Les constructions de la normale à l'ellipse, indiquées par le jeune et ingénieux Géomètre, sont, peut-être, *moins commodes* que celle où l'on fait usage des foyers.

2° Quoiqu'il en soit, le premier théorème de la page 31 peut être énoncé ainsi :

M, M' *étant deux points correspondants, sur l'ellipse* AB *et sur le cercle* AC (*); *si l'on trace les normales* MR M'R *à ces courbes; le lieu du point* R *est la circonférence décrite du point* O *comme centre, avec* a + b *pour rayon.*

3° Ce théorème, dû à M. d'Ocagne, peut être généralisé.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Soient deux ellipses ayant un axe commun. Soient, sur ces courbes, M, M′ *deux points correspondants ; c'est-à-dire, ayant même projection sur l'axe commun. Soient, enfin,* MR, M′R *les normales respectives, en* M, M′. *Le lieu du point* R *est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les axes des courbes données* (*).

Autre chose :

Voici, à propos de séries, une proposition qui peut être utile.

Soit une série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad \text{(A)}$$

On supprime les termes $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma \dots$, *dont les indices vont en augmentant, et qui sont tels que la série auxiliaire*

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \dots$$

soit convergente. Il reste

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{\alpha-1} + u_{\alpha+1} + \dots u_{\beta-1} + u_{\beta+1} + \dots \qquad \text{(B)}$$

Cela posé, les séries (A), (B) *sont, simultanément, convergentes, divergentes ou indéterminées.*

Application: On demande si la série

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

est convergente ou divergente.

Je supprime

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \text{ (série convergente).}$$

Il reste

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots \text{ (série divergente).}$$

Donc la proposée est *divergente.*

Autre application :

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ (A) (**)}.$$

(*) Les demi-axes de cette troisième ellipse sont déterminés par les formules

$$A = a + \frac{bb'}{a}, \quad B = b + b'.$$

(**) Voici la loi des termes :

1° *Si* $n = 2^\alpha$, $u_n = \frac{1}{n}$;

2° *Si* n *est impair,* $u_n = \pm \frac{1}{n}$, *selon que* $n = 4\mu \pm 1$;

3° *Si* $n = 2^\alpha i$, i *étant impair,* $u_n = u$.

Je supprime

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

Il reste

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots \quad \text{(B)}.$$

Je supprime

$$-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} - = -\frac{2}{3}.$$

Il reste

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \ldots \quad \text{(B')}.$$

Je supprime

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \ldots = \frac{2}{5}, \text{ etc.}$$

Si l'on continue *indéfiniment* les suppressions, la limite des restes est zéro. Or, on a supprimé

$$2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la série (A) est convergente, et a pour *somme* $\frac{\pi}{2}$.

Voici une question qui intéressera, peut-être, quelques-uns de vos lecteurs.

Pour toute valeur réelle de x,

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2+x^4)} + \frac{x^3}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4+x^8)}$$
$$+ \frac{x^9}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8+x^{16})}$$
$$+ \frac{x^{21}}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}+x^{32})} + \cdots \text{ (*)}.$$

Enfin, à propos de questions, en voici une que je crois très difficile à résoudre directement.

Théorème. — *La somme des fractions*

(*) Les exposants sont :
$0 = 3 - 3, \quad 3 = 6 - 3, \quad 9 = 12 - 3, \quad 21 = 24 - 3.$

$$(2n-1)\frac{2.3\ldots n}{3.5.7\ldots\overline{2n+1}}, \qquad (2n-3)\frac{4.5\ldots n}{5.7\ldots\overline{2n-1}},$$

$$(2n-7)\frac{6.7\ldots n}{7.9\ldots\overline{2n-3}}, \ldots, \text{ égale l'unité}.$$

N.-B. — D'après l'*origine* de ces fractions, la dernière est $\frac{1}{n+1}$ ou $3\frac{1}{n+2}$, selon que n est *pair* ou *impair*.

Pour finir :

1° x *étant compris entre* 0 *et* 1, *on a*

$$\frac{1}{2.3(2+x)^2}+\frac{x^2}{4.5(2+x)^4}+\frac{x^4}{6.7(2+x)^6}+\ldots=$$

$$\frac{1}{2.3.4}-\frac{4x}{3.4.8}+\frac{11x^2}{4.5.16}-\frac{26x^3}{5.6.32}+\ldots$$

2° *Quand* x *surpasse l'unité, la première série reste convergente; mais la seconde devient divergente.*

3° *En conséquence, l'égalité ci-dessus*, vraie *dans le premier cas, est absurde dans le second.*

A-t-on remarqué ce genre de discontinuité ?

BIBLIOGRAPHIE

Histoire des sciences mathématiques et physiques, par M. Maximilien Marie; répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique; tome X, de Laplace à Fourier.

Le dixième volume de cette importante publication a pour sous-titre : de Laplace à Fourier. Il contient la fin de la treizième période, celle qui s'étend de Lagrange à Laplace et le développement de la quatorzième période. Celle-ci comprend, pour citer les noms les plus célèbres : Laplace, Legendre, Carnot, Ivory, Meusnier, Mascheroni, Simon Lhuillier. C'est à ce dernier géomètre qu'est dû, pour un triangle sphérique rectangle, le théorème exprimé par l'égalité :

$$\sin^2\frac{a}{2}=\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2}.$$

Cette relation, comme le fait observer M. Marie, est, dans la géométrie de la sphère, l'analogue du théorème de Pythagore, dans la géométrie plane; elle a été démontrée en 1810, dans les Annales de Gergonne. Nous la citons ici parce qu'elle nous semble constituer un exercice intéressant de trigonométrie sphérique ; mais elle n'est pas, bien entendu, autrement importante.

L'attention, dans la lecture du dixième volume de M. Marie, se portera

principalement : sur la vie de Monge, dont le récit est placé aux premières pages; sur celle de Laplace, dans laquelle on trouvera (p. 87) une intéressante remarque de M. Marie, relative à la précession des équinoxes; enfin sur celles de Legendre et de Carnot. On trouvera, dans le chapitre consacré à ce dernier géomètre, sur les infiniment petits et sur les équations différentielles, à propos de l'ouvrage intitulé *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal*, une dissertation parfaitement conduite, après laquelle M. Marie conclut que si Carnot n'a pas exprimé sa pensée dans une forme juste, son idee n'était pourtant pas inexacte et c'est, en effet, croyons-nous, le meilleur résumé qu'on puisse faire de l'ouvrage en question (*).

G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

4. — *Lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites* (**).

On sait que ce lieu est une droite; cette propriété due à Newton (*C. M. S.*, p. 348) peut s'établir de la manière suivante.

Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

l'équation d'une conique Γ; cette courbe sera tangente à la droite représentée par l'équation

$$u_i x + v_i y + w_i z = 0,$$

si l'on a (*loc. cit.*, p. 132)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & u_i \\ B'' & A' & B & v_i \\ B' & B & A'' & w_i \\ u_i & v_i & w_i & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les coordonnées (x, y, z) du centre de Γ vérifient les relations

$$Ax + B''y + B'z = 0,$$
$$B''x + A'y + Bz = 0.$$

D'après cela, le déterminant Δ peut s'écrire, en utilisant

(*) A propos des principaux ouvrages de Carnot, nous avons été surpris de ne pas voir cité le *Traité de la corrélation des figures*, que Chasles d'ailleurs a, lui-même, à peine mentionné (Aperçu historique, p. 370).

(**) Voyez les *Examens d'admissibilité et d'admission à l'École polytechnique*, 1886, p. 16. (Croville-Morant, éditeur, 20, rue de la Sorbonne.)

une combinaison naturelle

$$\begin{vmatrix} A & B'' & o & u \\ B'' & A' & o & v_i \\ o & o & A''z + B'x + By & u_i x + v_i y + w_i z \\ u_i & v_i & u_i x + v_i y + w_i z & o \end{vmatrix} = o.$$

Ce déterminant développé donne

$$\frac{(u_i x + v_i y + w_i z)^2}{A v_i^2 - 2B'' u_i v_i + A' u_i^2} = \frac{A''z + B'x + By}{B''^2 - AA'}.$$

En donnant à i, dans cette relation, successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 et en posant

$$P_i = u_i x + v_i y + w_i z,$$
$$A v_i^2 - 2B'' u_i v_i + A' u_i^2 = \rho_i,$$

on a

$$\frac{P_1^2}{\rho_1} = \frac{P_2^2}{\rho_2} = \frac{P_3^2}{\rho_3} = \frac{P_4^2}{\rho_4} = \frac{1}{t}$$

et, par suite

$$\Sigma_i = A v_i^2 - 2B'' u_i v_i + A' v_i^2 + t P_i^2 = o. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

En éliminant A, B'', A' et t entre les quatre équations linéaires et homogènes

$$\Sigma_1 = o, \quad \Sigma_2 = o, \quad \Sigma_3 = o, \quad \Sigma_4 = o,$$

on a l'équation du lieu sous la forme

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & 2u_1 v_1 & (u_1 x + v_1 y + w_1 z)^2 \\ u_2^2 & v_2^2 & 2u_2 v_2 & (u_2 x + v_2 y + w_2 z)^2 \\ u_3^2 & v_3^2 & 2u_3 v_3 & (u_3 x + v_3 y + w_3 z)^2 \\ u_4^2 & v_4^2 & 2u_4 v_4 & (u_4 x + v_4 y + w_4 z)^2 \end{vmatrix} = o. \qquad (1)$$

Ce déterminant se simplifie et l'on a :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1^2 & 2u_1 v_1 & w_1(2u_1 x + 2v_1 y + w_1) \\ u_2^2 & v_2^2 & 2u_2 v_2 & w_2(2u_2 x + 2v_2 y + w_2) \\ u_3^2 & v_3^2 & 2u_3 v_3 & w_3(2u_3 x + 2v_3 y + w_3) \\ u_4^2 & v_4^2 & 2u_4 v_4 & w_4(2u_4 x + 2v_4 y + w_4) \end{vmatrix} = o. \qquad (2)$$

Ce dernier déterminant est du premier degré en x et y; il représente la droite de Newton. Le déterminant (1) donne le lieu cherché sous une forme remarquable, bien connue (Paul Serret, *Geométrie de Direction*, p. 71 ; et *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 145),

$$\Sigma_1^4 \lambda_1 P_1 = o,$$

équation dans laquelle on donne aux coefficients λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des valeurs telles que les coefficients des termes du second degré disparaissent.

Il reste à reconnaître que la droite trouvée passe par les points milieux des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites données. La vérification directe serait assez pénible, mais on peut éviter cet effort de calcul en prenant deux des droites proposées pour axes de coordonnées et en observant que la forme

$\Sigma_1^4 \lambda_1 P_1^2$ *devient* $\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 + \mu_4\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2$

μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 étant déterminés de telle sorte que les termes du second degré disparaissent; en effet, une forme linéaire reste, après la transformation linéaire, une forme linéaire.

On obtient alors une équation qui est celle que l'on trouve habituellement (*C. M. S.*, p. 351).

$$x(q - q') + y(p - p') + \frac{1}{2}(p'q' - pq) = 0,$$

et sur laquelle on vérifie sans peine la propriété en question.

On peut aussi utiliser la forme remarquable

$$\Sigma_1^4 \lambda_1 P_1^2 = 0, \qquad \text{(N)}$$

donnée à l'équation de la droite de Newton, pour reconnaître que, dans les coniques correspondant à l'équation précédente (lorsque les paramètres λ sont quelconques), deux sommets opposés du quadrilatère sont conjugés. De là on conclut facilement, comme l'a fait M. P. Serret (*loc. cit.*) la propriété de la droite de Newton. Il suffit de considérer l'équation (N) comme représentant une conique constituée par la droite de Newton et par la droite de l'infini.

QUESTION 124

Solution par M. J. Rat, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée Saint-Louis (classe de M. Piéron).

On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section, on mène dans le plan de la courbe une perpendiculaire à l'axe, qui coupe la courbe en deux points A *et* B. *Au point* A, *on mène dans le plan de la parabole la normale* AM *à cette courbe; puis par* AM, *on fait passer des*

plans variables. Lieu des foyers des paraboles, suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane.

(Amigues.)

Prenons pour plan des xy le plan de la parabole de section droite, pour axes des x et des y l'axe et la tangente au sommet de cette parabole et pour axe des z la perpendiculaire à son plan, menée par son sommet. L'équation du cylindre parabolique est alors :

$$y^2 - 2px = 0.$$

L'équation de la normale AM du plan des xy est d'autre part :

$$x + y - \frac{3p}{2} = 0,$$

et l'équation générale des plans passant par cette normale est :

$$x + y - \frac{3p}{2} + \lambda z = 0.$$

Soient α, β, γ les coordonnées d'un des points du lieu. Ce point se trouve dans un des plans passant par la normale AM à la parabole de section droite. On a donc :

$$\alpha + \beta - \frac{3p}{2} + \lambda\gamma = 0. \qquad (1)$$

Exprimons que le point (α, β, γ) est foyer de la courbe de section du cylindre par le plan, c'est-à-dire que les tangentes menées du point (α, β, γ) à la courbe de section forment une conique de l'espèce cercle. Cela revient à exprimer que le plan donné

$$x + y - \frac{3p}{2} + \lambda z = 0$$

est un plan cyclique du cône circonscrit à la surface, et ayant pour sommet le point (α, β, γ).

Ce cône se compose évidemment de deux plans perpendiculaires au plan des xy et a pour équation :

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) - [p(x + \alpha) - \beta y]^2 = 0,$$

et l'équation générale des quadriques passant par l'intersection du plan considéré et du cône précédent est :

$$(y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) - [p(x + \alpha) - \beta y]^2$$
$$+ \left(x + y + \lambda z - \frac{3p}{2}\right)(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D}) = 0.$$

Il s'agit d'exprimer que parmi ces quadriques se trouve une sphère, ce qui donne les conditions :

$$B - 2p\alpha = A - p^2 = \lambda C, \qquad (2)\ (3)$$

$$2p\beta + A + B = 0, \qquad (4)$$

$$C + A\lambda = 0, \qquad (5)$$

$$C + B\lambda = 0. \qquad (6)$$

Si entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), on élimine A, B, C, et λ, on aura les équations d'une ligne, qui représentera le lieu cherché. Les équations (4), (5), (6), donnent :

$$A = B = -p\beta.$$

L'équation (1) donne :

$$\lambda = -\frac{\alpha + \beta - \frac{3p}{2}}{\gamma}.$$

substituant dans (5), on en tire :

$$C = -A\lambda = \frac{-p\beta\left(\alpha + \beta - \frac{3p}{2}\right)}{\gamma}.$$

Enfin substituant dans (2) et (3) ces valeurs de A, B, C et λ, on a les équations du lieu, qui sont, en remplaçant α, β, γ par x, y, z :

$$x = \frac{p}{2}$$

et

$$y\left(x + y - \frac{3p}{2}\right)^2 + (y + p)z^2 = 0.$$

La première de ces équations montre que le lieu est une courbe située dans un plan parallèle au plan des yz, mené par le foyer de la parabole de section du cylindre parabolique par le plan des xy.

Pour avoir l'équation de cette courbe dans ce dernier plan, je fais $x = \frac{p}{2}$, dans la seconde équation du lieu, et j'ai ainsi :

$$y(y - p)^2 + z^2(y + p) = 0,$$

d'où

$$z^2 = \frac{-y(y - p)^2}{y + p}.$$

De cette équation on déduit immédiatement la forme du

lieu. Il est compris tout entier entre les droites $y = o$ et $y + p = o$, et cette dernière droite est une asymptote du lieu. Enfin le lieu est tangent à l'axe des z à l'origine O, il est symétrique par rapport à Oy, et il a un point double isolé, le point A de Oy, tel que $OA = OB = p$.

On déduit de ces observations diverses les formes du lieu lequel est une cubique constituée par une branche unique de forme conchoïdale.

NOTA. — Solution analogue par M. Grolleau, élève au lycée de Marseille.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 44.)

III

En dernière analyse, les principes de la méthode infinitésimale se ramènent donc à deux notions : celle de *limite* et de *variation continue*. Etudions séparément chacune de ces deux idées, et demandons-nous si, en fondant sur elle tout un développement nouveau, les sciences mathématiques pouvaient encourir le reproche d'altérer le caractère de leurs méthodes.

Je rappelle la définition de la limite.

Une quantité variable X a pour limite une quantité déterminée A, quand on peut, si petit qu'il plaise à l'esprit de choisir un nombre ε, trouver, dans la variation de X, un instant (*) à partir

(*) Ce mot est employé ici dans un sens purement logique et n'implique nullement l'idée du temps.

duquel la différence A — X reste moindre, en valeur absolue, que ε. Malgré la longueur de cet énoncé, la définition est des plus claires. Elle indique nettement la propriété spéciale de la variation de X, qui s'exprimera par ces mots : X, a pour limite A. Elle ne vise aucune loi de variation définie, n'exige pas que X augmente ou diminue constamment. Quelle que soit la façon dont X varie, le fait de la limite consiste exclusivement en ce que la différence entre une quantité fixe et la variable peut devenir et rester moindre que toute quantité donnée. Cette propriété de X pourrait être incompatible avec telle ou telle loi de variation, mais évidemment elle ne l'est pas avec la seule autre condition imposée a X, à savoir que X varie, puisqu'au contraire elle l'exige.

Considérons l'exemple suivant :

$$X = \frac{1}{x} \cdot [x(x + 2)]$$

Si l'on fait tendre x vers zéro, le premier facteur $\frac{1}{x}$ croît indéfiniment; cela veut dire qu'il peut dépasser n'importe quelle valeur, pourvu qu'on prenne x suffisamment petit; le second facteur $x(x + 2)$ peut devenir, dans les mêmes conditions, aussi petit qu'on voudra. Le produit de ces deux facteurs, X, a pour limite 2. En effet, pour toute valeur de x, le produit

$$\frac{1}{x} \times x(x + 2)$$

a la même valeur que

$$X' = x + 2.$$

X et X' sont deux variables constamment égales. Ce sont deux expressions différentes d'une même quantité variable : la limite de cette quantité se voit, sans difficulté, sur l'expression X'. On reconnaît en effet, immédiatement, que $x + 2$ deviendra aussi voisin de 2 qu'on voudra; 2 est donc la limite de X.

Il est essentiel de remarquer que ce raisonnement ne cache aucun mystère; quand, de l'égalité $X = X'$, nous déduisons

cette autre

$$\lim X = \lim X',$$

nous ne sous-entendons aucun principe, ni postulat. Cette égalité est exigée par la définition même de la limite. Il y a identité entre les quantités X et X'; la loi de variation est la même, mais elle s'exprime de deux manières différentes, l'une plus commode que l'autre pour mettre en évidence l'existence de la limite, voilà tout.

X pourrait encore s'écrire sous forme de fraction $\frac{x(x+2)}{x}$, dont les deux termes tendent vers zéro et nous retrouvons alors, dans cet exemple, le type des rapports étudiés dans le calcul différentiel. On dit quelquefois, en considérant la première forme de X, le produit de zéro par l'infini donne 2, ou, en considérant la seconde, le quotient de zéro par zéro donne 2. Ce sont là des façons de parler, qui ne signifient rien absolument par elles-mêmes. On connaît la fameuse preuve de la création (du père Gratry), fondée sur ce que la multiplication de zéro par l'infini donne quelque chose de déterminé. Si jamais quelqu'un a pris cette plaisanterie au sérieux, il n'a certainement rien compris à la question. Sans doute, il peut arriver à un mathématicien d'employer telle ou telle locution bizarre, mais il faut alors avoir bien précisé le véritable sens qu'il y met. Ainsi, s'il dit jamais, à propos de l'exemple précédent, que zéro multiplié par l'infini donne 2, ce qu'il entend par là se réduit à cette idée si nette : On peut assigner à x une valeur assez petite pour que la quantité $\frac{1}{x}x(x+2)$ diffère de 2, d'aussi peu qu'on voudra.

Qu'est-ce qui peut donc obscurcir des idées aussi claires et aussi précises? Qu'est-ce qui a pu créer des difficultés troublantes pour tant d'esprits? Je ne parle pas seulement des philosophes, à qui, quelquefois, on pourrait reprocher de ne s'être pas assez pénétrés des méthodes mathématiques; mais comment comprendre que Lagrange, par exemple, ait pu médire de la méthode des limites?

Je crois en voir l'explication dans une idée qu'on ajoute souvent à la notion de limite et qui n'y est nullement conte-

nue, à savoir *qu'une variable atteint sa limite*. Beaucoup s'imaginent voir les mathématiciens suivre une variable jusqu'à sa limite, et arriver eux-mêmes à l'instant où elle l'atteint. C'est là une erreur des plus graves, qui a pu troubler les penseurs de tous les temps. Elle a suffi à engendrer des fantômes métaphysiques dont on a peine encore à se débarrasser.

Pour Lagrange, le doute n'est pas possible. « Cette méthode, dit-il à propos de la méthode des fluxions de Newton, a, comme celle des limites, qui n'en est que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent pour ainsi dire d'être des quantités; car, quoique l'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise aussitôt que ses termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois. »

Lagrange voulait sans doute atténuer l'expression de sa pensée quand il déclarait que le rapport de deux quantités nulles n'offre pas une idée claire et précise : il aurait pu dire, il me semble, que ce rapport n'a aucune espèce de sens. Mais précisément la méthode des limites ne considère pas l'instant où les quantités cessent d'exister.

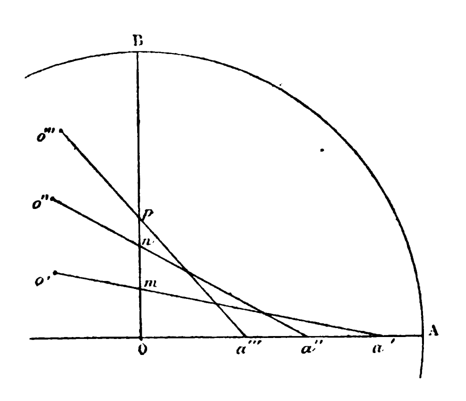
Quand on dit que le rapport $\frac{x(x+2)}{x}$ a pour limite 2, lorsque x tend vers zéro, on entend seulement parler des valeurs du rapport correspondant à des valeurs non nulles de x, et ce que l'on exprime c'est la propriété de ces valeurs de s'approcher de 2 autant qu'on le veut.

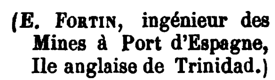
(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

219. — Une droite ao, se confondant d'abord avec le rayon AO, glisse par une de ses extrémités (a) sur ce rayon; elle est animée, en même temps, d'un mouvement de O en B,

sur le rayon OB perpendiculaire à AO, de telle sorte que les parties extérieures, mo', no'', po''',... soient toujours égales au chemin parcouru sur ce rayon. Donner l'équation de la courbe, ou de l'arc de courbe décrit par l'extrémité (o) de la droite mobile.




(E. FORTIN, ingénieur des Mines à Port d'Espagne, Ile anglaise de Trinidad.)

Cette question est des plus simples; elle nous avait même été donnée pour le journal de *Mathématiques élémentaires*; mais elle conduit à diverses remarques intéressantes :

1° On examinera le cas où les rayons OA, OB, au lieu d'être rectangulaires font un angle quelconque θ, et l'on fera voir que le lieu est, dans ce cas, une strophoïde oblique.

2° Étant données deux droites rectangulaires Δ, Δ', se coupant en O, on cherchera l'enveloppe U des droites qui coupent Δ en A, Δ' en A', de telle sorte que

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AA'} = a,$$

a désignant une constante donnée.

3° On fera voir que si l'on prend (dans la direction AA') $\mathrm{AI} = \mathrm{OA'}$, le lieu de I est précisément la courbe U. Cette courbe est une quartique unicursale; elle peut donc être construite, bien simplement, par points et par tangentes.

4° Déduire de cette remarque, de celle qui constitue la question de M. Fortin et du principe de Chasles sur le centre instantané de rotation, une description, par points et par normales, des strophoïdes droites.

N.-B. — On pourra, avantageusement, croyons-nous, pour démontrer ces diverses propriétés, observer que les longueurs des trois côtés du triangle rectangle OAA' peuvent être représentées par :

$$OA' = \frac{a}{2}(1 - t^2), \qquad AA' = \frac{a}{2}(1 + t^2), \qquad OA = at;$$

t désignant un paramètre variable.

Les coordonnées de U sont alors

$$x = a\frac{2t^3}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{a}{2}\frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2}.$$

La quartique U est formée de deux bras paraboliques tangents à l'axe ox; elle possède sur oy un point de rebroussement.

Divers exercices conduisent à cette quartique; nous citerons le suivant.

Une parabole mobile P coupe oy en deux points fixes A, B; elle est, en outre, constamment tangente à ox. Soit C le point de contact. Le cercle ABC coupe P en un quatrième point I; l'enveloppe de CI est une quartique égale à la courbe U considérée ci-dessus; les axes ox, oy sont, bien entendu, rectangulaires.

G. L.

220. — Etudier la série

$$1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{(1.2).2^2.5} + \frac{1.3}{(1.2.3).2^3.7} + \ldots + \frac{1.3..2n-3}{(n!)2^n(2n+1)} + \ldots$$

Montrer qu'elle est convergente et que sa valeur égale $2 - \frac{\pi}{4}$.

(*Roux*, élève au lycée de Grenoble.)

Rectification. — *Année 1886*, p. 268, l. 3; *lisez*

$$\alpha' = \text{cotg}\,\frac{A}{2}\left(\frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C}\right) = \text{tg}\,A'\left(\frac{\beta}{\sin 2B'} + \frac{\gamma}{\sin 2C'}\right).$$

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7414-7.

QUELQUES QUESTIONS

RELATIVES A L'ÉTUDE DES POINTS INVERSES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 53.)

6. — *Il y a d'autres couples de points inverses qui jouissent de propriétés analogues.*

En effet sur le milieu de CO_b j'élève une perpendiculaire qui coupe en φ_{cb}, φ'_{cb} la circonférence décrite sur $O_a\,O_b$ comme diamètre, on a :

$$\varphi'_{cb}\,\widehat{A}\,\varphi_{cb} = \varphi'_{cb}\,\widehat{B}\,\varphi_{cb} = 180 - \varphi'_{cb}\,\widehat{C}\,\varphi_{cb}.$$

Sur le milieu de CO_a j'élève une perpendiculaire qui coupe en φ_{ca}, φ'_{ca} la même circonférence, on a :

$$\varphi'_{ca}\,\widehat{A}\,\varphi_{ca} = \varphi'_{ca}\,\widehat{B}\,\varphi_{ca} = 180 - \varphi'_{ca}\,\widehat{C}\,\varphi_{ca}.$$

Cette circonférence a pour équation

$$c\gamma^2 + (b + a)\,\beta\gamma + (b + a)\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0, \qquad (10)$$

c'est le segment capable de $\frac{C}{2}$ décrit sur AB.

φ_{cb}, φ'_{cb} appartiennent à l'hyperbole équilatère

$$(c + a)\beta^2 + b\beta\gamma + (c + a)\alpha\gamma + b\alpha\beta = 0, \qquad (11)$$

qui passe par C, A, O_c, O_a.

φ_{ca}, φ'_{ca} appartiennent à l'hyperbole équilatère

$$(c + b)\alpha^2 + (c + b)\beta\gamma + a\alpha\gamma + a\alpha\beta = 0, \qquad (12)$$

qui passe par C, B, O_c, O_b.

L'équation de la droite $\varphi_{cb}\varphi'_{cb}$ est

$$(b - c)\alpha + (a + c)\beta + c\gamma = 0. \qquad (13)$$

L'équation de φ_{ca}, φ'_{ca} est

$$(c + b)\alpha + (a - c)\beta + c\gamma = 0. \qquad (14)$$

On obtient ces résultats en suivant une marche analogue à celle que nous avons indiquée pour les points F_c, F'_c.

On aurait aussi de même les points φ_{ba}, φ'_{ba} ; φ_{bc}, φ'_{bc} ; φ_{ab}, φ'_{ab} ; φ_{ac}, φ'_{ac}.

Les douze points φ sont toujours réels.

Les quatre droites $\varphi_{cb}\varphi'_{cb}$, $\varphi_{bc}\varphi'_{bc}$, $F_bF'_b$, $F_cF'_c$ concourent au milieu de O_cO_b, etc.

On trouverait, comme précédemment,

$$\cos^2 \frac{1}{2} \varphi_{cb}C\varphi'_{cb} = \frac{p-a}{2c} \qquad \cos \varphi_{cb}C\varphi'_{cb} = -\frac{p-b}{c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \varphi_{ca}C\varphi'_{ca} = \frac{p-b}{2c} \qquad \cos \varphi_{ca}C\varphi'_{ca} = -\frac{p-a}{c}.$$

Tous les angles de la figure se calculent facilement en fonction des côtés par leurs lignes trigonométriques, car on a :

$$AF_cB = AF'_cB = \frac{180 + C}{2},$$

$$F_cAC - F_cCA = F'_cAC - F'_cCA = \frac{A-C}{2},$$

$$F_cBC - F_cCB = F'_cBC - F'_cCB = \frac{B-C}{2},$$

$$A\varphi_{cb}B = A\varphi'_{cb}B = \frac{C}{2},$$

$$\varphi_{cb}AC - \varphi_{cb}CA = 90 - \frac{1}{2}(A - C),$$

$$\varphi'_{cb}CA - \varphi'_{cb}AC = 90 + \frac{1}{2}(A - C),$$

$$\varphi_{cb}BC - \varphi_{cb}CB = \frac{B-C}{2},$$

$$\varphi'_{cb}CB - \varphi'_{cb}BC = 180 - \frac{1}{2}(B - C), \text{ etc., etc.}$$

Remarque. — Les cercles et les hyperboles équilatères dont nous avons parlé, c'est-à-dire les cercles décrits sur OO_a, OO_b, OO_c, O_bO_c, O_aO_c, O_aO_b, comme diamètres et les hyperboles représentées par les équations (5), (7), (11), (12), etc., sont des courbes qui sont à elles-mêmes leurs propres inverses. (Voir § 2 et § 3.)

On a donc, en tout, neuf couples de points inverses qui jouissent de la propriété que chaque couple est vu des trois sommets sous des angles égaux ou supplémentaires, un seul de ces couples peut devenir imaginaire, c'est F_c, F'_c et la chose a lieu si, C étant le plus petit côté, on a : $3c < a + b$.

On aurait facilement aussi les équations des coniques inscrites qui ont pour foyers deux des points φ.



Ainsi, par exemple, l'équation de l'Ellipse qui a pour foyers $\varphi_{cb'}$ et φ'_{cb} est

$$\sqrt{-a(c-b)\alpha} + \sqrt{-b(a+c)\beta} + c\sqrt{\gamma} = 0.$$

La conique inscrite qui a pour foyer φ_{ab}, φ'_{ab} est une hyperbole,

—	—	φ_{ac}, φ'_{ac}	—
—	—	φ_{bc}, φ'_{bc}	—
—	—	φ_{ba}, φ'_{ba}	ellipse réelle,
—	—	φ_{ca}, φ'_{ca}	—
—	—	φ_{cb}, φ'_{cb}	—

Remarquons enfin : 1° Que la conique inscrite qui a pour foyers F_c, F'_b touche, sur AC, la conique inscrite qui a pour foyers φ_{cb}, φ'_{cb} et touche, sur BC, la conique inscrite qui a pour foyers φ_{ca}, φ'_{ca}.

2° Que les quatre points (il n'y en a que quatre, au lieu de six, puisque nous venons de voir qu'il y a des points de contact communs) de contact des trois coniques inscrites ayant pour foyers F_c, F'_c; φ_{cb}, φ'_{cb}; φ_{ca}, φ'_{ca} avec les côtés CA et CB sont sur le cercle décrit de C comme centre avec AB pour rayon, cercle déjà considéré par M. de Longchamps (*J. S.*, p. 57 1886) et qu'il appelle Δ.

7. — Tous ces résultats ont été trouvés analytiquement, mais il est fort simple de les démontrer synthétiquement par la géométrie ; nous allons le faire brièvement pour les points F_c, F'_c; ce serait tout à fait analogue pour un autre couple de points F ou φ.

Soient F_c, F'_c les points où la perpendiculaire élevée sur le milieu de CO_c, coupe la circonférence OO_cAB décrite sur OO_c comme diamètre.

Joignons F_c et F'_c aux trois sommets,

OA, OB, OC sont les bissectrices des angles $F_cAF'_c$, $F_cBF'_c$, $F_cCF'_c$;

Joignons O_cF_c, $O_cF'_c$, F_cO,

$F_cAF'_c$, $F_cBF'_c$, $F_cO_cF'_c$ sont égaux, car ils ont pour mesure $\frac{1}{2}$ arc F'_cOF_c, mais comme $CF'_cO_cF_c$ est un losange, on a

$F_cO_cF'_c = F_cCF'_c$; donc les trois angles $F_cAF'_c$, $F_cBF'_c$, F_cCF' sont égaux. C. Q. F. D.



On calcule facilement *cos* $\widehat{OCF_c}$, car soit ω le milieu de CO_c on a

$$\cos^2 F_cCO = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma = \frac{\overline{\omega C}^2}{\overline{CF}_c^2} = \frac{\overline{CO}_c^2}{4O_cF^2} = \frac{\overline{CO}_c^2}{4\omega O_c . OO_c} = \frac{CO_c}{2OO_c} = \frac{p}{2c}.$$

Le problème se discute sans difficultés et l'on retrouve ainsi les résultats déjà établis.

Remarque. — Si α et β sont les points où le cercle $ABOO_c$ coupe CB et CA, $B\beta$ et $A\alpha$ sont perpendiculaires à CO.

Démontrons, pour terminer, que le cercle AOO_cB est son propre inverse et que l'hyperbole lieu du point K tel que $KAC - KCA = \frac{A - C}{2}$ est sa propre inverse.

Soit F_c un point quelconque du cercle AOO_cB; soit F'_c le point inverse de F_c

on a

$$F_cBA = B - F'_cBA, \quad \text{et} \quad F_cAB = A - F'_cAB,$$

ou

$$F_cBA + F_cAB = 180 - C - (F'_cBA + F'_cAB);$$

mais F_c appartenant au cercle AOO_cB

on a

$$F_cBA + F_cAB = 180 - AF_cB = \frac{180 - C}{2},$$

donc

$$F'_cBA + F'_cAB = \frac{180 - C}{2},$$

donc

$$\widehat{BF'_cA} = BF_cA,$$

et F'_c est sur le cercle.

Soit maintenant F_c un point quelconque de l'hyperbole, lieu de K, un point tel que

$$KAC - KCA = \frac{A - C}{2},$$

F'_c le point inverse de F_c.

On a

$$F'_cAC = A - F_cAC, \quad \text{et} \quad F_cCA = C - F_cCA,$$

ou

$$F'_cAC - F_cCA = A - C - (F_cAC - F_cCA);$$



mais

$$F_cAC - F_cCA = \frac{A - C}{2},$$

donc

$$F'_cAC - F'_cCA = \frac{A - C}{2},$$

et F'_c appartient à la courbe.

NOTE SUR LES SURFACES RÉGLÉES

Par M. **Amigues,** professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Marseille.

Si, dans une surface réglée, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est d'un ordre infinitésimal supérieur au troisième, la surface est un plan ou un cône, et la plus courte distance considérée est par suite rigoureusement nulle.

M. Bertrand qui examine cette question dans son *Traité de calcul différentiel* (pages 605 et 606) ne donne pour solution que les plans. L'analyse suivante, qui est fort simple, donne en outre tous les cônes.

J'adopterai les notations de la note que j'ai publiée récemment dans ce journal *(Janvier 1887, page 6)*.

Pour que l'ordre d'infinitude soit supérieur au troisième, il faut et il suffit que l'on ait simultanément les équations :

$$dadq - dbdp = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4}(d^2ad^2q - d^2bd^2p) + \frac{1}{6}(dad^3q + dqd^3a - dbd^3p - dpd^3b) = 0. \qquad (2)$$

La première s'écrit

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

Soit m la valeur commune de ces deux rapports; on a, dès lors,

$$\left\{ \begin{array}{l} da = mdb, \\ dp = mdq. \end{array} \right. \qquad (3)$$

Diffèrentiant deux fois ces deux équations et portant dans l'équation (2) les valeurs de da, dp, d^2a, d^2p, d^3a, d^3p, on observe que les termes en m et en d^2m se détruisent. On a donc dm en facteur. Le résultat est, en effet,

$$dm(dbd^2q - dqd^2b) = 0.$$

Première Solution. — On prend pour m une constante arbitraire K. On a alors, en intégrant, les équations (1),

$$a = Kb + h,$$
$$p = Kq + r.$$

La droite génératrice est donc représentée par les équations,

$$\begin{cases} x = (Kb + h)z + Kq + r, \\ y = bz + q. \end{cases}$$

multipliant la seconde équation par — K et ajoutant à la première, on a

$$x = Ky + hz + r,$$

équation dans laquelle K, h, r sont des constantes. La surface ést donc un plan représenté par cette équation ; et comme K, h, r sont arbitraires, on obtient pour solution *tous les plans.*

Deuxième Solution. On a

$$\frac{d^2b}{db} = \frac{d^2q}{dq};$$

d'où, en intégrant une première fois,

$$dq = hdb;$$

et, en intégrant encore,

$$q = hb + g.$$

Mais, on a

$$\frac{da}{dp} = \frac{db}{dq} = \frac{1}{h}.$$

Donc $$dp = hda,$$
et $$p = ha + r.$$

La droite est alors représentée par les équations

$$\begin{cases} x = a(z + h) + r, \\ y = b(z + h) + g. \end{cases} \qquad (4)$$

Cette droite passe par un point fixe, dont les coordonnées sont

$$x = r, \qquad y = g, \qquad z = -h.$$

La surface qu'elle décrit est donc un cône.

J'ajoute qu'on a *tous les cônes*.

En effet, a et b restant fonctions arbitraires de la variable t, on peut dire que b est fonction arbitraire de a, c'est-à-dire que l'on a

$$F(a, b) = o, \qquad (5)$$

F étant une fonction arbitraire. L'équation de la surface s'obtient en éliminant a et b entre les équations (4) et (5), ce qui donne

$$F\left(\frac{x - r}{z + h}, \frac{y - g}{z + h}\right) = o.$$

C'est l'équation de tous les cônes qui ont pour sommet le point dont les coordonnées sont $x = r$, $y = g$, $z = -h$. Mais les quantités r, g, h, introduites par l'intégration, sont des constantes arbitraires. On a donc bien tous les cônes, comme solution.

NOTE SUR LES POINTS ISOBARIQUES

Par M. **G. Rogier.**

1. Théorème. — *Si les coordonnées barycentriques des sommets d'un triangle* Δ *sont respectivement :*

$$A_1, B_1, C_1$$
$$A_2, B_2, C_2$$
$$A_3, B_3, C_3$$

avec les relations :

$$A_1B_2C_3 = B_1C_2A_3 = C_1A_2B_3; \qquad (1)$$

ou bien,

si les équations des côtés de ce triangle sont

$$M_1\alpha + N_1\beta + P_1\gamma = o,$$
$$M_2\alpha + N_2\beta + P_2\gamma = o,$$
$$M_3\alpha + N_3\beta + P_3\gamma = o,$$

avec les relations :

$$M_1N_2P_3 = N_1P_2M_3 = P_1M_2N_3 \qquad (2)$$

le triangle considéré est triplement homologique au triangle de référence ABC.

En effet, les droites qui joignent les trois sommets du triangle Δ respectivement aux sommets A, B, C; puis B, C, A et enfin C, A, B du triangle de référence, ont pour équations :

$$C_1\beta - B_1\gamma = o \qquad A_1\gamma - C_1\alpha = o \qquad B_1\alpha - A_1\beta = o$$
$$A_2\gamma - C_2\alpha = o \qquad B_2\alpha - A_2\beta = o \qquad C_2\beta - B_2\gamma = o$$
$$B_3\alpha - A_3\beta = o \qquad C_3\beta - B_3\gamma = o \qquad A_3\gamma - C_3\alpha = o$$

Or, il est visible que les relations (1) expriment la condition nécessaire et suffisante pour que les trois droites de chacun des groupes précédents, concourent en un même point.

Si l'on se place maintenant dans la seconde hypothèse et que l'on cherche les points d'intersection des côtés du triangle respectivement avec BC, AC, AB; puis avec AC, AB, BC; enfin avec AB, BC, AC, côtés du triangle de référence; on voit que les relations (2) expriment la condition nécessaire et suffisante pour que les points d'intersection que l'on obtient ainsi soient, trois à trois, sur une même droite.

Le théorème énoncé se trouve donc vérifié.

Il est bien évident que les relations (1) et (2) sont simultanément vérifiées pour un même triangle.

2. — Considérons maintenant trois points isobariques quelconques de même espèce :

$$M_1\ (A, B, C)\ ;\ M_2\ (B, C, A)\ ;\ M_3\ (C, B, A).$$

Le triangle $M_1M_2M_3$ est triplement homologique au triangle de référence, car, dans ce cas, la condition (1) devient une identité.

Les côtés de ce triangle ont respectivement pour équations:

$$\begin{aligned} A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma &= o & & A_1 = BC - A^2 \\ B_1\alpha + C_1\beta + A_1\gamma &= o & \text{en posant}\quad & B_1 = AC - B^2 \quad (3) \\ C_1\alpha + A_1\beta + B_1\gamma &= o & & C_1 = AB - C^2 \end{aligned}$$

de telle sorte que les triangles ABC et $M_1M_2M_3$ admettent pour axes d'homologie les droites droites:

$$(\delta_1) \quad \frac{\alpha}{A_1} + \frac{\beta}{C_1} + \frac{\gamma}{B_1} = o,$$
$$(\delta_2) \quad \frac{\alpha}{C_1} + \frac{\beta}{B_1} + \frac{\gamma}{A_1} = o, \qquad (4)$$
$$(\delta_3) \quad \frac{\alpha}{B_1} + \frac{\beta}{A_1} + \frac{\gamma}{C_1} = o.$$

qui sont visiblement les transversales réciproques des côtés du triangle $M_4M_5M_6$ formé par les isobariques de deuxième espèce des points considérés.

Si l'on cherche les centres d'homologie, on trouve que ces points Ω_1, Ω_2, Ω_3 ont pour coordonnées :

$$\Omega_1\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{C}, \frac{1}{B}\right); \quad \Omega_2\left(\frac{1}{C}, \frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right); \quad \Omega_3\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{A}, \frac{1}{C}\right).$$

3. — Les axes d'homologie forment un triangle qui a pour sommets :

$$\Delta_1\left(\frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{B}{B_1}\right); \quad \Delta_2\left(\frac{C}{C_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{A}{A_1}\right); \quad \Delta_3\left(\frac{B}{B_1}, \frac{A}{A_1}, \frac{C}{C_1}\right).$$

et les centres d'homologie, un triangle dont les côtés ont pour équations :

$$(\omega_1)\ \frac{A_1}{A}\alpha + \frac{C_1}{C}\beta + \frac{B_1}{B}\gamma = 0,$$
$$(\omega_2)\ \frac{C_1}{C}\alpha + \frac{B_1}{B}\beta + \frac{A_1}{A}\gamma = 0, \qquad (5)$$
$$(\omega_3)\ \frac{B_1}{B}\alpha + \frac{A_1}{A}\beta + \frac{C_1}{C}\gamma = 0.$$

Donc, les sommets Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les points harmoniquement associés aux droites ω_1, ω_2, ω_3.

En comparant les équations (4) et (5) on peut voir ensuite que les axes d'homologie δ_1, δ_2, δ_3 sont parallèles aux transversales réciproques des droites ω_1, ω_2, ω_3.

Le triangle formé par ces transversales réciproques, et le triangle des axes d'homologie ont pour centre d'homothétie le point E, centre de gravité commun.

Désignons par ω'_1, ω'_2, ω'_3 ces transversales ; par Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3 les sommets du triangle qu'elles forment. Ces points ont pour coordonnées :

$$\Omega'_1\left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{B_1}, \frac{1}{C_1}\right); \qquad \Omega'_2\left(\frac{1}{B_1}, \frac{1}{C_1}, \frac{1}{A_1}\right); \qquad \Omega'_3\left(\frac{1}{C_1}, \frac{1}{A_1}, \frac{1}{B_1}\right).$$

Donc, Ω'_1, Ω'_2, Ω'_3 sont les points harmoniquement associés aux axes d'homologie. Ils ont pour coordonnées

$$(A_1, C_1, B_1); \qquad (C_1, B_1, A_1); \qquad (B_1, A_1, C_1);$$

et les côtés du triangle qu'ils forment ont pour équations :

$$\begin{aligned} A\alpha + C\beta + B\gamma &= 0, \\ C\alpha + B\beta + A\gamma &= 0, \\ B\alpha + A\beta + C\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

On peut aisément démontrer que ces droites sont harmoniquement associées aux centres d'homologie Ω_1, Ω_2, Ω_3; et qu'elles sont parallèles aux côtés du triangle M_4, M_5, M_6.

On verrait aussi que les droites (5) sont parallèles aux transversales réciproques de (6).

Résumons, nous voyons que :

1° *Tout triangle qui a pour sommets trois points isobariques de même espèce* M_1, M_2, M_3 *est triplement homologique au triangle de référence.*

Les centres d'homologie sont les points réciproques des isobariques de deuxième espèce M_4, M_5, M_6.

Les axes d'homologie sont les transversales réciproques des côtés du triangle $M_4 M_5 M_6$.

2° *Les sommets du triangle des axes d'homologie sont harmoniquement associés aux côtés du triangle des centres d'homologie.*

3° *Les axes d'homologie sont parallèles aux transversales réciproques des côtés du triangle des centres d'homologie.*

4° *Les transversales réciproques des côtés du triangle des centres d'homologie forment un triangle qui a pour sommets les points harmoniquement associés aux côtés du triangle considéré* $M_1 M_2 M_3$.

5° *Les centres d'homologie sont harmoniquement associés aux droites qui joignent les points harmoniquement associés aux axes d'homologie.*

6° *Les droites qui joignent les points harmoniquement associés aux axes d'homologie sont parallèles aux côtés du triangle* $M_4 M_5 M_6$ *formé par les isobariques de deuxième espèce des points considérés.*

Les propriétés précédentes s'appliquent évidemment au triangle de Brocard A'B'C'. Et, dans ce cas particulier, on arrive aux conclusions suivantes, pour ne citer que les principales :

Les axes d'homologie d'un triangle quelconque ABC *et du triangle de Brocard correspondant, sont les transversales réciproques du*

triangle $KO_0O'_0$ *formé par le point de Lemoine et les réciproques des points de Brocard.*

Ces axes sont parallèles aux transversales réciproques des côtés du triangle DOO' *formé par les points de Brocard et le réciproque dn point de Lemoine.*

Les sommets du triangle des axes d'homologie sont harmoniquement associés aux côtés du triangle DOO'.

Les points harmoniquement associés aux axes d'homologie appartiennent aux droites qui joignent le centre de gravité E *au point de Lemoine et aux réciproques des points de Brocard. Ils forment un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de* $KO_0O'_0$.

Signalons ici que l'un des côtés de ce triangle est précisément la droite δ, étudiée par M. de Longchamps dans son article sur le cercle Δ.

Nous devons aussi rappeler que plusieurs des propriétés précédentes ont été signalées par M. de Longchamps dans l'étude citée et dans ses articles sur les *points réciproques et potentiels d'ordre p*. Ce sont celles qui se rapportent à l'axe d'homologie, primitivement désigné par G par. M. Brocard, et, actuellement, par la lettre (Ξ).

NOTE SUR LA TRANSFORMATION
DES COORDONNÉES DANS L'ESPACE

Par M. l'abbé **Reboul,** licencié ès sciences mathématiques, professeur au Collège de Belley.

1. — Si l'on désigne par a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', les cosinus que font trois axes rectangulaires OX', OY', OZ' avec trois axes primitifs, également rectangulaires, OX, OY, OZ, on a les relations connues :

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \quad (1) \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ab + a'b' + a''b'' &= 0 \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0 \quad (2) \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on observe que a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' sont les cosinus que font les axes OX, OY, OZ avec les axes

OX′, OY′ OZ′, on a les six équations suivantes, équivalentes aux précédentes :

$$\begin{matrix} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{matrix} \quad (3) \qquad \begin{matrix} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{matrix} \quad (4)$$

a, a′, a″; b, b′, b″; c, c′, c″ *désignant des quantités algébriques quelconques, les six équations* (1) *et* (2) *sont équivalentes aux six équations* (3) *et* (4).

Pour démontrer cette proposition, par un procédé algébrique direct, on peut, comme l'a montré Poisson, introduire six indéterminées auxiliaires ou, comme l'a indiqué M. de Longchamps (*) (*Géométrie analytique à trois dimensions*, p. 27) utiliser le principe de la multiplication des déterminants. Voici une démonstration tout à fait élémentaire et qui est peut-être nouvelle.

Élevons au carré les équations (1), après avoir tout fait passer dans le premier. membre.

Élevons également au carré les équations (2), puis multiplions par 2.

Additionnons les équations (1) et (2), ainsi modifiées, on a :

$$\left.\begin{matrix} (a^2+a'^2+a''^2-1)^2+(b^2+b'^2+b''^2-1)^2+(c^2+c'^2+c''^2-1)^2 \\ +2(ab+a'b'+a''b'')^2+2(ac+a'c'+a''c'')^4+2(bc+b'c'+b''c'')^2 \end{matrix}\right\} = 0,$$

ou, en développant :

$+a^4$ $+1$ $-2a^2$	$+a'^4$ $-2a'^2$	$+a''^4$ $-2a''^2$	$+2a^2a'^2$	$+2a^2a''^2$	$+2a'^2a''^2$
$+b^4$ $-2b^2$	$+b'^4$ $+1$ $-2b'^2$	$+b''^4$ $-2b''^2$	$+2b^2b'^2$	$+2b^2b''^2$	$+2b'^2b''^2$
$+c^4$ $-2c^2$	$+c'^4$ $-2c'^2$	$+c''^4$ $+1$ $-2c''^2$	$+2c^2c'^2$	$+2c^2c'^2$	$+2c'^2c''^2$
$+2a^2b^2$ $+2a^2c^2$ $+2b^2c^2$	$+2a'^2b'^2$ $+2a'^2c'^2$ $+2b'^2c'^2$	$+2a''^2b''^2$ $+2a''^2c''^2$ $+2b''^2c''^2$	$+4aa'bb'$ $+4aa'cc'$ $+4bb'cc'$	$+4aa''bb''$ $+4aa''cc''$ $+4bb''cc''$	$+4a'a''b'b''$ $+4a'a''c'c''$ $+4b'b''c'c''$

$= 0.$

Remarquons que chaque colonne verticale représente le

(*) Le procédé est bien connu. G. L.

développement d'un carré, on a donc :

$$\left.\begin{array}{l}(a^2+b^2+c^2-1)^2+(a'^2+b'^2+c'^2-1)^2+(a''^2+b''^2+c''^2-1)^2\\ +2(aa'+bb'+cc')^2+2(aa''+bb''+cc'')^2+2(a'a''+b'b''+c'c'')^2\end{array}\right\}=0.$$

Cette équation, dans laquelle nous supposons réelles les quantités a, a', a'', etc., étant la somme de six carrés parfaits, se décompose en six autres qui ne sont autres que les équations (3) et (4).

2. — Proposons-nous encore d'établir l'égalité, due à Jacobi,

$$a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 = a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2.$$

1° Les équations (2) peuvent s'écrire :

$$-ab = a'b' + a''b'',$$
$$-ac = a'c' + a''c'',$$
$$-bc = b'c' + b''c''.$$

Multiplions membre à membre les équations ainsi écrites :

$$-a^2b^2c^2 = [a'^2b'c' + a''^2b''c'' + a'a''(b'c'' + b''c')](b'c' + b''c''),$$

ou :

$$-(a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2) = (a'^2 + a''^2)b'c'b''c'' + a'a''(b'c'' + b''c')(b'c' + b''c'').$$

Si, dans le second membre de cette équation nous remplaçons $(a'^2 + a''^2)$ et $a'a''$ par leurs valeurs $(2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)$, $(-b'b'' - c'c'')$, tirées des équations (3) et (4), nous avons :

$$-(a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2) = (2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)b'c'b''c'' - (b'b'' + c'c'')(b'c'' + b''c')(b'c' + b''c''). \quad \text{(A)}$$

2° Les équations (4) peuvent s'écrire :

$$-aa' = bb' + cc'$$
$$-aa'' = bb'' + cc''$$
$$-a'a'' = b'b'' + c'c''.$$

Multiplions membre à membre les équations ainsi écrites :

$$-a^2a'^2a''^2 = [b^2b'b'' + bc(b'c'' + c'b'') + c^2c'c''](b'b'' + c'c''),$$

ou :

$$-(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) = (b^2 + c^2)b'b''c'c'' + bc(b'c'' + b''c')(b'b'' + c'c'').$$

Si, dans le second membre de cette équation, nous remplaçons $(b^2 + c^2)$ et bc par leurs valeurs $(2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)$, $(-b'c' - b''c'')$, tirées des équations (1) et (2), nous

avons :

$$-(a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2) = (2 - b'^2 - c'^2 - b''^2 - c''^2)b'c'b''c'' - (b'c' + b''c'')(b'c'' + b''c')(b'b'' + c'c''). \quad (B)$$

Les égalités (A) et (B) donnent :

$$a^2b^2c^2 + a'^2b'^2c'^2 + a''^2b''^2c''^2 = a^2a'^2a''^2 + b^2b'^2b''^2 + c^2c'^2c''^2,$$

c'est la relation de Jacobi.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE.

... Dans une note à laquelle je ne saurais reprocher que sa forme, trop flatteuse pour moi, M. Catalan émet l'avis que les constructions de la normale à l'ellipse que j'ai indiquées dernièrement sont peut-être moins commodes que celles où l'on fait usage des foyers. L'éminent professeur de l'Université de Liège n'aura sans doute pas pris garde qu'il s'agit là d'une *construction de chantier*. La construction au moyen de foyers (dans laquelle on doit prendre des bissectrices) est fort peu commode, pour ne pas dire plus, sur le chantier. Tandis que dans la première de celles que j'ai proposées qui est incontestablement *la plus pratique*, tout se réduit (voir *J. M. E.*, 1886, p. 29) au tracé des deux cours de parallèles M_1L_1, M_2L_2, M_3L_3,... et L_1N_1, L_2N_2, L_3N_3,... Or, à l'aide d'une règle munie de deux glissières engagées dans des rainures parallèles, le tracé d'un nombre quelconque de droites parallèles est la plus simple des opérations qu'on puisse avoir à effectuer sur un chantier, et ma construction se réduit absolument à cette opération répétée deux fois.

Il ne faut pas perdre de vue d'ailleurs, que les appareilleurs dressent leurs épures *à la grandeur d'exécution*. Il ne saurait, dans ces conditions, y avoir de construction plus commode que celle que je viens de rappeler, et j'ai recueilli là-dessus le témoignage d'un très grand nombre d'ingénieurs.

M. Catalan, pour qui je professe la plus grande vénération, ne m'en voudra certainement pas de cette déclaration, puis-

qu'il ne s'agit pas d'une controverse sur le terrain géométrique, où d'avance je lui rendrais les armes, mais bien sur le terrain pratique où mes fonctions m'ont permis de m'assurer d'une façon formelle de l'exactitude de mon observation....

Nota. — Pour le théorème énoncé à la page 31 et pour quelques propositions analogues on pourra consulter les *Nouvelles Annales* 1860 (p. 95-96; p. 235-238), et 1863 (p. 326-328).

Ce renseignement nous a été fourni par M. Brocard.

Un autre correspondant, M. Goulard, professeur au lycée de Marseille, nous signale ce même théorème comme proposé dans la *Géométrie analytique* de Briot et Bouquet dans la forme suivante :

Étant donnés une ellipse et le cercle construit sur le grand axe comme diamètre, on mène les normales au cercle et à l'ellipse aux points situés sur une même perpendiculaire au grand axe; trouver le lieu du point d'intersection de ces deux normales.

Quoi qu'il en soit du théorème énoncé à la page 31, la construction indiquée, dans la note en question, pages 29 et 30, pour le tracé de la normale à l'ellipse nous a paru nouvelle; dans tous les cas, elle est incontestablement simple et remarquable. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

5. — *Démontrer que la plus courte distance de deux droites Δ, Δ' tangentes à une courbe gauche Γ et infiniment voisines, est un infiniment petit du troisième ordre.*

Cette proposition (*) due à Bouquet (V. Bertrand, *Calcul différentiel*, p. 604) peut s'établir à la manière suivante.

(*) La droite Δ, dont il est ici question, et qui reste tangente à une courbe gauche donnée, engendre, comme l'on sait, une *surface développable*. Si l'on considère des surfaces gauches quelconques, le théorême correspondant à celui qui nous occupe s'énonce ainsi : *Dans une surface gauche la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est du même ordre infinitésimal que l'angle de ces génératrices.*

Soient x, y, z, les coordonnées d'un point M sur Γ; l'équation de la tangente Δ est comme l'on sait,

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \qquad (1)$$

Prenons sur Γ un point voisin M' et soient $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ses coordonnées; la tangente Δ' en M' est représentée par les égalités

$$\frac{X-x-\delta x}{d(x+\delta x)}=\frac{Y-y-\delta y}{d(y+\delta y)}=\frac{Z-z-\delta z}{d(z+\delta z)}. \qquad (2)$$

La plus courte distance ζ des droites Δ, Δ' est, d'après une formule connue (*C. M. S.*, t. III, p. 66).

$$\zeta=\frac{\begin{vmatrix}\delta x & \delta y & \delta z\\ dx & dy & dz\\ d(x+\delta x) & d(y+\delta y) & d(z+\delta z)\end{vmatrix}}{\sqrt{[dxd(y+\delta y)-dyd(x+\delta x)]^2+\ldots}}. \qquad (3)$$

Dans toutes ces formules, nous supposons que x, y, z représentent des fonctions d'un paramètre variable t et nous allons montrer que, dans l'égalité (3), le numérateur est un infiniment petit du sixième ordre, tandis que le dénominateur est du troisième ordre seulement.

La formule

$$\text{(A)} \qquad \delta x = dx + \frac{d^2x}{1.2}+\frac{d^3x}{1.2.3}+\cdots$$

donne

$$d(\delta x)=d^2x+\frac{d^3x}{1.2}+\cdots$$

D'après cela, le numérateur de la formule (3) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix}\delta x - dx & \delta y - dy & \delta z - dz\\ dx & dy & dz\\ dx + d(\delta x) & dy + d(\delta y) & dz + d(\delta z)\end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix}d^2x\ldots & d^2y\ldots & d^2z\ldots\\ dx & dy & dz\\ \frac{d^3x}{1.2}\ldots & \frac{d^3y}{1.2}\ldots & \frac{d^3z}{1.2}\ldots\end{vmatrix}$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement que la valeur principale du numérateur est un infiniment petit du sixième ordre.

Quant au dénominateur, l'un des termes qui constitue la quantité soumise au radical est

$$\{ dx[dy + d(\delta y)] - dy[dx + d(\delta x)] \}^2,$$

ou

$$\{ dxd^2y + \ldots - dyd^2x \ldots \}^2.$$

La valeur principale du dénominateur est donc égale à D, en posant

$$D = \sqrt{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2};$$

D est donc un infiniment petit du troisième ordre.

Cette expression se rencontre dans un grand nombre de questions d'analyse, relatives aux courbes gauches, et l'on sait, notamment (Bertrand, *loc. cit.*; p. 616), que

$$D = \frac{ds^3}{\rho},$$

ρ désignant le rayon de courbure et ds la différentielle de l'arc. On voit donc que D n'est pas nul, si ρ n'est pas infini. Le théorème énoncé se trouve donc établi, du moins dans le cas général; mais, pour rendre la démonstration tout à fait précise il resterait encore à montrer que le numérateur, abstraction faite du cas des courbes planes, ne s'abaisse jamais, au point de vue infinitésimal, au dessous du sixième ordre (*).

Remarque. — La formule (A), que nous avons utilisée ci-dessus, est une conséquence immédiate de la série de Taylor (Bertrand, p. 285).

Posons

$$\varphi(x + h) \equiv \varphi(x) + \frac{h}{1}\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\varphi^{n+1}(x+\theta h),$$

et représentons $\varphi(x)$ par y, h par dx; alors la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ est égale à l'accroissement de y, c'est ce qu'on représente par δy; nous avons donc

$$\delta y = dx\frac{dy}{dx} + \frac{(dx)^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$

ou

$$\delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \ldots$$

(*) Voyez, à ce propos, la note de M. Amigues, p. 101.

QUESTION 85

Solution par M. Charles MARTIN, élève au Lycée Condorcet.

On considère un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires Ox, Oy. *Soient* A, A′, *deux tangentes parallèles fixes et* PMQ, *une tangente mobile, ayant* M *pour point de contact et rencontrant* A *en* P, A′ *en* Q : 1° *sur* MP *et* MQ, *on décrit des cercles; le lieu décrit par le centre de similitude de ces circonférences est une quartique unicursale.* — 2° *Soit* B *le point de contact de* A *avec* C; *la droite* BM *rencontre le cercle, décrit sur* PQ *comme diamètre, en des points dont le lieu est une cubique.*

(G. L.)

Calculons les coordonnées du centre de similitude de ces deux cercles, en appliquant les formules connues :

$$x = \frac{aR' - a'R}{R' - R},$$

$$y = \frac{bR' - b'R}{R' - R},$$

a, b, a', b' désignant les coordonnées des centres des deux cercles et R et R′ leurs rayons.

Prenons pour axe des y le diamètre perpendiculaire à la direction des tangentes fixes.

Les coordonnées du point M sont : $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$

celles de P : $\dfrac{R(1-\sin\varphi)}{\cos\varphi}$, R;

celles de Q : $\dfrac{R(1+\sin\varphi)}{\cos\varphi}$, $-R$;

On aura donc pour a, b, a', b', R et R′ les valeurs suivantes :

$$a = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \qquad b = \frac{R}{2}(1+\sin\varphi)$$

$$a' = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi + \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) \qquad b' = \frac{R}{2}(1-\sin\varphi)$$

$$R = \frac{R(1-\sin\varphi)}{2\cos\varphi} \qquad R' = \frac{R}{2}\,\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de x et de y, on obtient :

$$x = \frac{R}{2}\cos\varphi,$$

$$y = \frac{R}{2}\,\frac{1 + \sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

$\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ s'exprimant en fonction d'un seul paramètre t, la courbe est donc une unicursale. Son équation cartésienne est :

$$4x^2(x^2 + y^2) - R^2(4x^2 + y^2) + R^4 = 0,$$

quartique circulaire, admettant les droites $x = \frac{R}{2}$, $x = -\frac{R}{2}$, comme asymptotes, et l'origine comme centre. Elle a deux points doubles isolés, sur l'axe des x, d'abscisses $\frac{R}{\sqrt{2}}$ $-\frac{R}{\sqrt{2}}$; enfin elle est tangente au cercle c aux points de coordonées (O, R); $(O, -R)$.

2° Le cercle décrit sur PQ comme diamètre est tangent à l'origine à l'axe Oy. Son centre est sur l'axe des x et son rayon est $\frac{R}{\cos\varphi}$. Son équation est donc :

$$x^2 + y^2 - 2\frac{R}{\cos\varphi}x = 0.$$

L'équation de la droite BM est :

$$x(1 - \sin\varphi) + (y - R)\cos\varphi = 0.$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant φ entre ces deux équations. On trouve l'equation :

$$(x^2 + y^2)y - 2R^2y + R^3 = 0$$

cubique circulaire, admettant l'axe Ox comme asymptote et coupant l'axe Oy en trois points dont les ordonnées sont : R, $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $-\frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$; de plus, elle est symétrique par rapport à cet axe.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud,** professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 91.)

Lorsque nous avons considéré la fonction $y = x^2$, nous avons dit que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite $2x$; en d'autres termes, quand des deux points M et M′ le second s'approche du premier en restant sur la courbe, la valeur $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ s'approche autant qu'on le veut de $2x$. Mais, dira-t-on, si de la relation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,\alpha$, on déduit pour l'angle α_1 de la tangente

$$2x = \text{tg}\,\alpha_1$$

ne se place-t-on pas à l'instant où Δx et Δy sont nuls, où M′ est venu coïncider avec M, où la sécante est venue prendre la position de la tangente? Nullement. On considère deux variables constamment égales ou identiques $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\text{tg}\,\alpha$; en d'autres termes, on a deux formes différentes, deux expressions analytiques d'une même valeur. L'expression $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se prête à un calcul très simple qui donne $2x$ pour la limite de ce rapport. D'un autre côté α_1 est, par définition même, la limite de l'angle α de la sécante avec la même direction. La définition de la tangente trigonométrique d'un arc montre immédiatement que si α se rapproche de α_1, $\text{tg}\,\alpha$ tend vers $\text{tg}\,\alpha_1$. Par conséquent, la deuxième expression $\text{tg}\,\alpha$ conduit à la limite $\text{tg}\,\alpha_1$. Il résulte de là que $2x = \text{tg}\,\alpha_1$.

Il n'y a rien là qui ressemble à l'application d'un principe de raison suffisante, suivant lequel ce qui est vrai quel que soit Δx, le sera encore à l'instant où Δx est nul. On ne se place pas à cet instant. On ne suppose nullement que le point mobile M' de la courbe ait achevé le chemin MM', ni que la rotation de la sécante l'ait amenée à coïncider avec la tangente. Ce sont là des considérations d'un ordre absolument étranger à la simple notion de limite.

Mais il est une opinion diamétralement opposée à celle que nous venons de réfuter, aussi fréquente, et non moins inexacte.

M. Ch. de Freycinet, dans son étude sur l'analyse infinitésimale, nous paraît l'avoir nettement formulée.

« Ce qui caractérise la limite, c'est à la fois que la variable puisse en-approcher autant qu'on le veut, et *néanmoins qu'elle ne puisse jamais l'atteindre rigoureusement*. Car, pour satisfaire à cette condition, il faudrait la réalisation d'une certaine infinité qui nous est interdite. Ainsi, pour que les polygones se confondissent exactement avec le cercle, il faudrait que le nombre des côtés devînt infini... La condition d'infinité, mêlée à ces questions leur enlève toute espèce de sens, on doit s'en tenir à l'idée d'une approximation indéfinie, c'est-à-dire de plus en plus grande à mesure que le nombre des côtés du polygone augmente davantage. »

Sans doute il faut qu'on s'en tienne à cette dernière idée, mais uniquement parce qu'elle seule est comprise dans la notion de limite; nullement parce que cette notion exclut la possibilité que la variable atteigne sa limite.

D'abord, dans quel sens entend-on que la variable n'atteint pas sa limite? Quelques lignes du même auteur vont nous éclairer : « Le propre de la limite, et ce qui fait que la variable ne l'atteint jamais exactement, c'est d'avoir une définition autre que celle de la variable, et la variable de son côté, tout en approchant de plus en plus de la limite ne doit jamais cesser de satisfaire à sa définition première. Cette circonstance capitale de deux définitions logiquement distinctes et telles néanmoins que les objets définis peuvent s'approcher de plus en plus l'un de l'autre, rend compte de

ce que paraît avoir d'étrange l'impossibilité de faire coincider exactement deux quantités dont on est maître d'ailleurs de diminuer la différence au-delà de toute expression. »

Sans aucun doute, la manière dont est comprise ici la question de savoir si la variable atteint sa limite revient à celle-ci : la limite est-elle un état possible pour la grandeur qui varie? Indépendamment de toute espèce de variation, existe-t-il un état de la grandeur qui soit précisément celui que définit la limite?

Pour répondre à cette question, en même temps que pour réfuter l'opinion que nous venons de citer, il suffit de se reporter à la définition de la limite.

La limite A, de X, est telle que la différence A — X peut devenir plus petite que toute quantité donnée ε. Je demande alors quel peut être le sens de cette différence, si A et X ne désignent pas les deux états d'une même grandeur.

Il ne peut intervenir dans un calcul, dans un raisonnement, dans une proposition mathématique quelconque, que la différence de deux grandeurs de même espèce, c'est-à-dire ayant la même définition mathématique. Si A et X ne sont pas de même nature, il ne saurait plus être question que d'une différence en qualité; — mais alors comment apprécier, comment mesurer cette différence; dans quel sens entendre qu'elle sera moindre qu'un élément ε ... ? ...

A, est nécessairement, en vertu de la définition même de la limite, un état particulier de la grandeur qui varie. Les objections, que semblent fournir quelques exemples bien connus, sont dus uniquement à un abus de langage et à une confusion d'idées.

Ainsi, la circonférence est, dit-on, la limite d'un polygone dont le nombre des côtés augmente indéfiniment. Quand on parle ainsi, on entend évidemment que la figure formée par le polygone ressemble de plus en plus à la circonférence. Ce langage est permis, puisqu'il exprime une idée nette de l'esprit. Mais, ni cette façon de parler, ni l'idée de cette ressemblance, ne sont admises en mathématiques. Il y a là abus du mot limite. Ce qui est rigoureusement mathématique, c'est la considération de telle ou telle quantité variable don

l'existence et la nature sont liées à celles de la courbe, par exemple, *la longueur de la circonférence.*

On appelle ainsi la limite (dont on a soin de démontrer l'existence) du périmètre d'un polygone inscrit, dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, en même temps que chacun tend vers zéro. Cet élément de la circonférence qu'on nomme sa longueur, est donc l'état particulier d'une grandeur de l'espèce longueur, tout comme le périmètre de chaque polygone inscrit. Pour fixer les idées, supposons qu'on porte la longueur d'un quelconque des périmètres sur la droite ox, à partir d'un point O.

Soient OA_1, OA_2, .. OA_n, ... une série d'états différents de cette variable. On démontre qu'elle a une limite, cela veut dire qu'il existe un point L sur ox, dont le point A_n s'approche autant qu'on veut ; OL représente donc la limite des périmètres des polygones inscrits. C'est une longueur, tout comme A_n, une quantité de même nature, qui en diffère de la même manière que deux états quelconques de la variable OA_p et OA_n diffèrent entre eux.

Considérons encore l'aire du cercle. Elle est égale (ce n'est plus ici une définition, mais l'objet d'une démonstration) à la limite des aires des polygones inscrits. Chacun des états de la variable est une surface définie par le nombre de mètres carrés ou de fractions de mètres carrés qu'il faut juxtaposer pour la recouvrir. En supposant, par exemple, que les polygones inscrits restent réguliers, leur surface est exprimée par $\frac{ph}{2}$, p étant le périmètre, h l'apothème. La quantité ainsi mesurée peut se représenter par un rectangle dont l'un des côtés soit p et l'autre $\frac{h}{2}$. Lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment p a pour limite la longueur de la circonférence (OL), h a pour limite le rayon du cercle. Le rectangle construit sur ces deux longueurs représente la limite de l'aire des polygones inscrits. Cette limite, l'aire du cercle, n'est-elle pas une quantité de même espèce que la variable? n'est-elle pas un état particulier de cette quantité

qu'on appelle une aire, et dont la définition mathématique ne porte que sur son rapport à l'unité de surface, sans tenir aucun compte de la forme du contour?

Sans doute, on dit couramment en mathématiques qu'une certaine courbe a pour limite une courbe d'une autre espèce; par exemple, une ellipse se déformant dans des conditions déterminées a pour limite une parabole. Mais on entend alors que l'ordonnée d'un point quelconque de l'ellipse, a pour limite l'ordonnée du point de la parabole qui a même abscisse. La quantité variable est, ici, cette ordonnée générale d'un point de la courbe.

En somme il y à là un point qui touche à la nature même des mathématiques : une courbe n'est pas, par *sa forme*, un être mathématique — mais bien par certaines quantités liées à son existence. Le cercle n'est nullement ce rond que nous représente notre imagination : le mathématicien ne connaît que les *points de cercle*, les extrémités de distances mesurées par un nombre fixe et comptées dans n'importe quelle direction à partir d'un point fixe. Il se trouve qu'en faisant se mouvoir, d'un mouvement continu, le point qui vient d'être défini, on engendre une ligne qui, pour notre esprit, est doué d'une certaine forme spéciale. Cette forme est une qualité, résultant nécessairement de la définition des points de cercle, mais qui n'intervient pas dans les déductions mathématiques.

(A suivre.)

RECTIFICATION. — Ajouter à la note placée au bas de la p. 81, le signalement d'une note publiée par M. d'Ocagne (J. M. E., 1885; p. 204.)

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8978-7.

TRACÉ PAR POINTS

AVEC LA RÈGLE ET L'ÉQUERRE, D'UNE CONIQUE DONT ON CONNAIT DEUX SOMMETS ET UN POINT DE LA COURBE

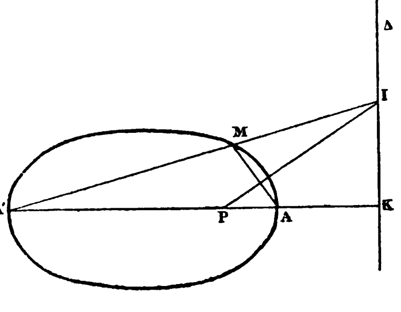
Par M. **Clément Thiry,** étudiant à la Faculté des Sciences de Gand.

M. de Longchamps dans son *Traité de Géométrie analytique*, p. 381, ainsi que dans ses intéressants articles sur la *Géométrie de la règle et de l'équerre,* indique un tracé, point par point (tracé s'effectuant au moyen de la règle et de l'équerre), pour une ellipse, dont on connaît : un point quelconque M et deux sommets A et A'. M. de Longchamps fait découler sa construction du théorême suivant.

Soient AA' *deux sommets et* M *un point quelconque de l'ellipse; la perpendiculaire à* AM, *en* A, *rencontre* A'M *en un point* I*; ce point décrit une droite* Δ, *perpendiculaire à* AA'.

Au moyen de cette remarque, une fois que la droite Δ est tracée, on voit comment on obtient aisément (avec la règle et l'équerre seulement) autant de points que l'on veut de l'ellipse.

Cette construction, au point de vue graphique, offre un inconvénient évident, que M. de Longchamps nous a signalé lui-même, si la forme de l'ellipse diffère peu de celle du cercle; c'est-à-dire, si l'excentricité de la conique est petite. Dans ce cas, on voit que Δ sort des limites de l'épure.



Voici un théorême, plus général que celui que nous venons de rappeler; il permet de répondre à la difficulté pratique, signalée ici.

Si du point de rencontre I de A'M avec une perpendiculaire quelconque Δ, à AA', on abaisse une perpendiculaire

sur MA, cette perpendiculaire passe constamment par un point fixe P.

En effet, l'ellipse étant rapportée à ses axes, soit

$$y = m(x + a),$$

l'équation de A'M

Si m' et m'' sont les coefficients angulaires de AM et de PI, on a

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}, \quad m'm'' = -1;$$

d'où

$$m'' = m\frac{a^2}{b^2}.$$

Soit $y = h$, l'équation de Δ, celle de PI sera

$$y - m(h + a) = m\frac{a^2}{b^2}(x - h).$$

En faisant $y = 0$, on trouve

$$x = h - \frac{b^2}{a^2}(h + a) = h\frac{c^2}{a^2} - \frac{b^2}{a}.$$

Le point P est donc fixe.

Ce théorème, qui a lieu également, avec les modifications convenables, pour l'hyperbole et la parabole, est encore vrai pour les deux autres sommets B et B'. Appliquons-le maintenant au tracé, avec la règle et l'équerre, d'une conique dont on connaît deux sommets (A et A' par exemple) et un point M de la courbe.

Prenons Δ arbitrairement, *mais dans les limites de l'épure;* le point M nous donnera le point fixe P.

Cela fait, on joindra le point P à un point quelconque I de AK et la perpendiculaire à PI, menée par A, rencontrera IA' en un point de la courbe.

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES
DE DEGRÉ QUELCONQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

L'équation de la courbe algébrique de degré n la plus générale s'écrit, en coordonnées polaires,

$$Q_n\rho^n + Q_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots\ldots + Q_1\rho + Q_0 = 0, \qquad (1)$$

Q_i étant une forme homogène de degré i en sin ω et cos ω.

Coupons cette courbe par une droite menée par l'origine O (qui est un point quelconque de son plan) et appelons ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n les vecteurs des points d'intersection.

Divisant la somme des produits $n - 1$ à $n - 1$ de ces vecteurs par leur produit, on a, en vertu de l'équation (1),

$$\sum \frac{1}{\rho_i} = \frac{(-1)^{n-1}Q_1}{(-1)^n Q_0} = \frac{A \cos \omega + B \sin \omega}{Q_0}, \quad (2)$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs 1, 2, 3, ..., n, de l'indice i.

De là, cette propriété bien connue :

Théorème I. — *Le lieu du centre des moyennes harmoniques, par rapport au point* O, *des points d'intersection d'une droite pivotant autour de ce point et d'une courbe algébrique quelconque* C *est une droite.*

Cette droite a, comme on sait, reçu le nom d'*axe harmonique* du point O par rapport à la courbe C.

Nous allons, de la formule (1), tirer d'autres théorèmes, en faisant usage des formules suivantes (*) où α_i représente l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, N_i la normale limitée à la perpendiculaire au rayon vecteur menée par l'origine O, R_i le rayon de courbure

$$d\rho_i = \rho_i \cot \alpha_i d\omega \quad (3)$$

$$d\alpha_i = \left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) d\omega. \quad (4)$$

Différentions (2) ; il vient

$$-\sum \frac{d\rho_i}{\rho_i^2} = \frac{-A \sin \omega + B \cos \omega}{Q_0} d\omega,$$

ou, d'après (3)

$$\sum \frac{\cot \alpha_i}{\rho_i} = \frac{A \sin \omega - B \cos \omega}{Q_0}. \quad (5)$$

Appelons ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, ... les sous-tangentes correspondant à ρ_1, ρ_2, ρ_3, ..., ω' l'angle polaire de la droite sur laquelle sont comptées ces sous-tangentes. Nous avons

$$\rho'_i = \rho_i \operatorname{tang} \alpha_i, \qquad \text{et} \qquad \omega = \frac{\pi}{2} + \omega'.$$

(*) Voir ma note *sur les transformations centrales des courbes planes* (*Mathésis*, 1884.)

Par suite, la formule (5) peut s'écrire

$$\sum \frac{1}{\rho'_i} = \frac{A \cos \omega' + B \sin \omega'}{Q_0};$$

c'est-à-dire que :

Théorème II. — *Si une droite* δ *pivotant autour du point* O *coupe une courbe algébrique* C *de degré* n *aux points* M_1, M_2 ..., M_n, *et que les tangentes en ces points à la courbe* C *coupent aux points* T_1, T_2, ..., T_n, *la perpendiculaire menée en* O *à la droite* δ, *le centre des moyennes harmoniques des points* T_1, T_2, ..., T_n, *relativement au point* O, *se trouve sur l'axe harmonique de ce point par rapport à la courbe* C.

Différentions encore la formule (5) ; il vient

$$-\sum \frac{\cot \alpha_i}{\rho_i^2} d\rho_i - \sum \frac{d\alpha_i}{\rho_i \sin^2 \alpha_i} = \frac{A \cos \omega + B \sin \omega}{Q_0} d\omega,$$

ou, en tenant compte des formules (2), (3) et (4),

$$-\sum \frac{\cot^2 \alpha_i}{\rho_i^2} - \sum \frac{1}{\rho_i \sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{\rho_i} - 1\right) = \sum \frac{1}{\rho_i},$$

ou encore

$$-\sum \frac{N_i}{\rho_i R_i \sin^2 \alpha_i} + \sum \frac{1}{\rho_i} = \sum \frac{1}{\rho_i},$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{1}{R_i \sin^3 \alpha_i} = 0, \qquad (6)$$

d'où ce théorème :

Théorème III. — *La somme des inverses des produits des rayons de courbure aux points où une courbe algébrique est coupée par une droite quelconque, par les cubes des sinus des angles correspondants de cette courbe et de cette droite, est nulle.*

Dans le cas où la courbe est une conique, soient R_1 et R_2 les rayons de courbure en deux points M_1 et M_2 ; les tangentes en ces points se coupant au point T, posons $M_1T = t_1$, $M_2T = t_2$. La formule (6) donne alors

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3}.$$

C'est une propriété bien connue. J'en ai déduit (*) que

(*) *Nouv. Ann. de Mathém.*, 3e série, t. II, p. 462.

si r_1 et r_2 sont les projections de R_1 et R_2 sur la corde $M_1 M_2$, les parallèles respectivement menées par r_1 et r_2 à M_1T et M_2T se coupent sur la symédiane issue de T dans le triangle M_1TM_2.

Une classe intéressante de courbes algébriques, constituant, à certain égard, une généralisation du cercle, est formée par celles qui n'admettent d'autres directions asymptotiques que les directions isotropes, et que, pour cette raison, nous nommerons des *courbes isotropiques.* (*)

L'équation cartésienne d'une telle courbe, qui ne saurait être que de degré pair, est de la forme

$$(x^2 + y^2)^p + H_{2p-1} + H_{2p-2} + \dots + H_1 + H_0 = 0,$$

H_i, représentant une forme homogène, de degré i, en x et y. Son équation polaire sera dès lors

$$\rho^{2p} + \rho^{2p-1}Q_{2p-1} + \dots + \rho Q_1 + Q_0 = 0, \qquad (7)$$

Q_i, étant une forme homogène, de degré i, en $\sin \omega$ et $\cos \omega$.

Si une droite menée par l'origine coupe la courbe en des points dont les vecteurs sont $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{2p}$, l'équation (7) montre que

$$\rho_1\rho_2 \dots \rho_{2p} = Q_0, \qquad (8)$$

et, comme l'origine est un point quelconque, on peut énoncer ce théorème.

Théorème IV. — *Le produit des distances d'un point* O *quelconque aux points de rencontre d'une courbe isotropique et d'une droite menée par le point* O *est constant, quelle que soit la direction de cette droite.*

Q_0 étant la même chose que H_0, on voit qu'on peut compléter ce théorème (en appelant, comme Laguerre, *puissance* d'un point par rapport à une courbe le résultat de la substitution des coordonnées du point dans le premier membre de l'équation de la courbe) de la manière suivante :

Ce produit constant est égal à la puissance du point O *par rapport à la courbe isotropique considérée.*

(*) Ces courbes isotropiques, abstraction faite du mot (d'ailleurs bien choisi) que propose ici M. d'Ocagne. ont été considérées déjà. Voyez notamment, à propos de certaines propriétés des *Rosettes,* étendues à ces courbes, un article des *Nouvelles Annales,* 1848 ; p. 214

G. L.

Considérons deux courbes isotropiques de même degré

$$(x^2 + y^2)^p + U = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^p + V = 0.$$

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à ces deux courbes, qu'on pourrait appeler *courbe radicale*, sera

$$U - V = 0,$$

et, comme U et V sont généralement de degré $2n - 1$, il en sera de même de la courbe radicale. Prenons une troisième courbe isotropique de même degré.

$$(x^2 + y^2)^p + W = 0.$$

Ses courbes radicales avec les deux précédentes seront

$$W - U = 0$$
$$W - V = 0$$

dont les $(2n - 1)^2$ points d'intersection se trouvent sur la courbe radicale des deux premières. Ce seront les *centres radicaux* des trois courbes.

Prenant la différentielle logarithmique de (8), on a

$$\sum \frac{d\rho_i}{\rho_i} = 0.$$

ou, d'après (3),

$$\sum \cot \alpha_i = 0. \qquad (9)$$

De là, puisque l'origine est un point quelconque, ce théorème :

Théorème V. — *La somme des cotangentes des angles sous lesquels une courbe isotropique est rencontrée par une droite quelconque de son plan est nulle.*

Différentions (9); il vient

$$\sum \frac{d\alpha_i}{\sin^2 \alpha_i} = 0,$$

ou, d'après (4),

$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) = 0. \qquad (10)$$

Donc :

Théorème VI. — *Si une droite quelconque coupe une courbe isotropique sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ en des points où les rayons de courbure sont $R_1, R_2, R_3, \ldots$ et qu'une perpendiculaire quelconque à cette droite détermine sur les normales correspondantes, à partir de leurs pieds respectifs, les segments* N_1,

N_2, N_3,... *on a*

$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N_i}{R_i} - 1\right) = 0.$$

Pour une autre perpendiculaire à la droite considérée, on aurait

$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i}\left(\frac{N'_i}{R_i} - 1\right) = 0;$$

donc
$$\sum \frac{1}{\sin^2 \alpha_i} \cdot \frac{N_i - N'_i}{R_i} = 0,$$

ou
$$\sum \frac{1}{R_i \sin^3 \alpha_i} = 0.$$

On retombe ainsi sur la propriété énoncée dans le théorème III pour les courbes algébriques absolument quelconques.

Comme exemple de courbe isotropique, je citerai la quartique unicursale à laquelle j'ai dernièrement consacré une étude (*). On voit que tous les théorèmes contenus dans le § 7 de cette étude appartiennent soit aux courbes isotropiques générales coupées par une droite quelconque, soit même aux courbes algébriques absolument quelconques. C'est donc à tort que ces théorèmes ont figuré au nombre des propriétés particulières de la quartique unicursale en question.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 58).

18. Points complémentaires (M, M_c) et anti-complémentaires (M, M_{-c}) dans un système quelconque de coordonnées. — Etant donné un point M dont les coordonnées dans un système quelconque par rapport au triangle de référence ABC sont ξ, η, ζ on peut toujours lui faire correspondre un second point que nous noterons par M_c et qui a pour coordonnées :

(*) *Journal de Mathématiques Spéciales*, p. 79, 97 et 121.

$$\eta + \zeta, \quad \zeta + \xi, \quad \xi + \eta;$$

nous dirons que M_c est le *point complémentaire de* M *dans le système de coordonnées qu'on a adopté* et que M *est le point anti-complémentaire de* M_c (*).

Les coordonnées du point anti-complémentaire de M que nous noterons par (M_{-c}) seront :

$$-\xi + \eta + \zeta, \qquad \xi - \eta + \zeta, \qquad \xi + \eta - \zeta.$$

Il est bien entendu que nous ne donnons ici que des valeurs proportionnelles aux coordonnées et non pas les coordonnées absolues.

Les points qui coïncident avec leurs complémentaires sont donnés par les équations :

$$\frac{\xi}{\eta + \zeta} = \frac{\eta}{\xi + \zeta} = \frac{\zeta}{\eta + \xi}$$

qui admettent deux solutions

$$\xi = \eta = \zeta,$$
$$\xi + \eta + \zeta = 0.$$

La première donne un point déterminé L, la seconde une droite déterminée λ qui est la droite harmoniquement associée à L. Le point L se transforme donc en lui-même et tout point de la droite λ jouit de cette propriété.

Si l'on calcule les coordonnées d'une suite de points complémentaires on trouve :

$$\begin{array}{ccc} \xi, & \eta, & \zeta \\ \eta + \zeta, & \zeta + \xi, & \xi + \eta, \\ 2\xi + \eta + \zeta, & 2\eta + \zeta + \xi, & 2\zeta + \xi + \eta, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

expression que l'on peut remplacer par

$$\xi + C(\eta + \zeta), \qquad \eta + C(\xi + \zeta), \qquad \zeta + C(\xi + \eta)$$

(*) Voir la note jointe au § 20.

On peut consulter sur les points complémentaires et anti-complémentaires :

E. Hain. — *Archiv der Physik und Mathematiks von Grünert*, octobre 1885, p. 214-217.

G. de Longchamps. — *J. E.*, 1886, p. 131, 276. — *A. F.*, Nancy. 1886.

E. Lemoine. — *A. F.*, Nancy, 1886.

J. Neuberg. — *J. S.*, décembre 1886, p. 265-269.

E. Vigarié. — *M.*, 1887; la première partie de cette note est résumée dans le § 18 ci-dessus.

C étant un coefficient variable qui oscille autour de l'unité et a pour limite 1. Donc les coordonnées tendent à devenir égales. De là on conclut que, une suite de points, dont chacun est le complémentaire du précédent, a pour limite le point L.

Deux points complémentaires (M, M_c) *sont en ligne droite avec le point* L. — Car tout point N de la droite MM_c a des coordonnées de la forme (*)

$$m\xi + n(\eta + \zeta), \qquad m\eta + n(\xi + \zeta), \qquad m\zeta + n(\xi + \eta),$$

le rapport $\frac{n}{m}$ étant proportionnel à $\frac{NM}{NM_c}$. Si l'on fait $m = n$ on trouve trois quantités égales, c'est-à-dire les coordonnées du point L.

Si P *est le point d'intersection de* λ *avec* MM_c, *le rapport anharmonique :*

$$\frac{LM}{LM_c} : \frac{PM}{PM_c}$$

a la valeur constante (— 2).

En effet, représentons les coordonnées de L et P par

$$m\xi + n(n + \zeta), \qquad m\eta + n(\xi + \zeta), \qquad m\zeta + n(\xi + \eta),$$
$$m_1\xi + n_1(\eta + \zeta), \qquad m_1\eta + n_1(\xi + \zeta), \qquad m_1\zeta + n_1(\xi + \eta),$$

alors
$$\frac{LM}{LM_c} : \frac{PM}{PM_c} = \frac{n}{m} : \frac{n_1}{m_1}$$

Si on exprime que les coordonnées de P vérifient l'équation de λ, on trouve :

$$m_1\xi + n_1(\eta + \zeta) + m_1\eta + n_1(\xi + \zeta) + m_1\zeta + n_1(\xi + \eta) = 0.$$

(*) Les coordonnées normales absolues du point N qui divise la distance des points M, Mc ayant pour coordonnées absolues (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) dans le rapport $\frac{NM}{NM_c} = -\frac{n}{m}$ sont $\frac{mx + nx_1}{m + n}$, $\frac{my + ny_1}{m + n}$, $\frac{mz + nz_1}{m + n}$. Si les coordonnées sont prises dans un autre système, mais sont toujours absolues (c'est-à-dire vérifient l'identité fondamentale analogue à $ax + by + cz = 2S$) les mêmes formules conviennent. Mais si (x, y, z) (x_1, y_1, z_1) diffèrent des coordonnées absolues par des facteurs que nous supposerons être respectivement λ et λ_1, les coordonnées sont :

$$\frac{\lambda x . NM_c - \lambda_1 x_1 . NM}{NM_c - NM}, \quad \frac{\lambda y . NM_c - \lambda_1 y_1 . NM}{NM_c - NM}, \quad \frac{\lambda z . NM_c - \lambda_1 z_1 . NM}{NM_c - NM},$$

on voit par là que les coordonnées de N sont de la forme $(mx + nx_1)$, $(my + ny_1)$, $(mz + nz_1)$

où
$$\frac{m}{n} = -\frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{NM_c}{MN}.$$

D'où
$$\frac{m_1}{n_1} = -2.$$

Et comme on a déjà vu que $n = m$, on a bien :
$$\frac{LM}{LM_c} : \frac{PM}{PM_c} = \frac{n}{m} : \frac{n_1}{m_1} = -2.$$

De là on déduit les propriétés suivantes :

1° Le rapport des distances du point limite L au point M et à son complémentaire M_c dépend de la position du point donné M.

2° La droite qui joint un point à son complémentaire passe par le point limite L.

3° Le rapport anharmonique des quatre points M, M_c, P, L est constant et égal à (-2).

Etant donnée une figure quelconque F, les complémentaires des différents points de F forment une figure F_c appelée *figure complémentaire* de F ; de même F est la *figure anticomplémentaire* de F_c.

Une droite d a pour figure complémentaire une droite d_c ; le point de rencontre de d avec λ étant son propre homologue appartient aussi à la droite d_c donc :

Deux droites complémentaires ou anticomplémentaires se coupent sur λ.

Cette propriété, jointe à celle des points complémentaires, d'être alignés avec L, montre que deux figures complémentaires ou anticomplémentaires sont homologiques, le centre d'homologie étant L et l'axe d'homologie λ.

Soient L', L'', L''' les points de rencontre de AL, BL, CL avec BC, CA, AB; ces points sont les complémentaires de A, B, C. Cette remarque nous conduit à la construction suivante du point M_c complémentaire d'un point donné M :

On joint L' au point de rencontre de AM avec λ ; cette droite coupera LM au point cherché M_c:

19. Points supplémentaires (M, M_σ) **et points antisupplémentaires** $(M, M_{-\sigma})$. — Lorsque les coordonnées sont normales, le point $M(x, y, z)$ a pour complémentaire le point $(y + z, z + x, x + y)$ que nous noterons par la

lettre M_σ et que nous appellerons, comme l'a proposé M. J. Neuberg (*J. E.* 1886, p. 276), *point supplémentaire* de M. Le point antisupplémentaire de M sera :

$$M_{-\sigma}(-x+y+z,\ x-y+z,\ x+y-z).$$

Le point limite L est le centre du cercle inscrit à ABC, et la droite λ passe par les pieds des bissectrices extérieures.

20. Points complémentaires (M, M_γ) **et points anticomplémentaires** $(M, M_{-\gamma})$. *(Complémentaires et anticomplémentaires barycentriques).* — Le cas le plus simple des figures complémentaires est celui où les coordonnées sont barycentriques, c'est aussi le plus important. Pour ce motif nous sous-entendrons le mot *barycentriques* et quand nous dirons simplement points complémentaires ce sera les points complémentaires *barycentriques* que nous aurons en vue.

Dans les autres cas (sauf celui où les coordonnées sont normales) on devra expliciter le système de coordonnées que l'on emploie.

A un point donné M (α, β, γ) correspondra un point complémentaire (*) que nous noterons par la lettre M_γ et un point anticomplémentaire que nous désignerons par $M_{-\gamma}$.

(*) La méthode de transformation que nous étudions dans ces paragraphes a été indiquée pour la première fois par N. E. Hain (Archives de Grunert, 1885, p. 214). M. E. Hain proposait d'appeler *points complémentaires*, les points dont il a été question ci-dessus, dans le système des coordonnées normales. M. de Longchamps a généralisé cette idée et a proposé, pour éviter toute ambiguïté, d'expliciter le système de coordonnées que l'on emploie; il a, en même temps, introduit l'idée des points anticomplémentaires (*J. E.* 1886, p. 131) qui n'avait pas été donnée par M. Hain.

Plus récemment, M. J. Neuberg a proposé d'établir encore une plus grande distinction : de conserver les termes de *points complémentaires* et *anticomplémentaires* quand il s'agit des coordonnées barycentriques, et d'adopter les termes de *points supplémentaires* et *antisupplémentaires* quand on se sert des coordonnées normales.

On peut employer indifféremment les termes proposés par MM. de Longchamps et Neuberg ; néanmoins nous adopterons ici ceux proposés par M. J. Neuberg qui sont plus courts : les coordonnées normales et barycentriques étant généralement les seules employées (*).

(*) A ces deux systèmes principaux, il faut pourtant ajouter les *coordonnées tripolaires*. Elles ont conduit M. Neuberg à la considération de points remarquables qu'il a nommés *centres isologiques* et *centres isodynamiques ;* elles nous paraissent appelées à jouer, dans cette intéressante géométrie du triangle, un rôle important. C'est ce que M. Neuberg ne tardera pas, croyons-nous, à prouver, en publiant dans Mathesis les remarquables articles dont il nous a communiqué la substance. G. L.

$$M_\gamma \ldots (\beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta)$$
$$M_{-\gamma} \ldots (-\alpha + \beta + \gamma,\ \alpha - \beta + \gamma,\ \alpha + \beta - \gamma).$$

Le point limite L se confond avec le centre de gravité du triangle et la droite λ est rejetée à l'infini. Dans ce cas on voit que :

Les figures complémentaires sont homothétiques, le centre d'homothétie étant le centre de gravité G.

Comme ici $\dfrac{PM}{PM_\gamma} = 1$, alors $\dfrac{GM}{GM_\gamma} = -2$.

D'où la construction suivante pour déterminer le point M_γ, complémentaire d'un point donné M.

On joint MG et l'on prolonge cette droite au delà du point G d'une longueur $GM_\gamma = \frac{1}{2}MG$. Pour le point anticomplémentaire, on prend $GM_\gamma = 2MG$ (*). *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE.

... Le mode de génération des *tridents* que vous avez fait connaître dans le *Journal de Mathématiques Spéciales* (1886, p. 225), m'a suggéré une construction excessivement simple de la normale à ces courbes.

Soient, en effet, A et B deux pôles, U une courbe quelconque, M un point mobile sur cette courbe. Nous menons BI, parallèle à AM, et MI, perpendiculaire à AB; le point I décrit une courbe V.

Rapportons les courbes U et V à l'axe polaire AB et, respectivement, aux pôles A et B.

Si ω est l'angle que font AM et BI avec AB, on a, pour les

(*) Voici une autre construction empruntée à un exercice proposé par M. d'Ocagne (*J. M. E.*).

Si M_1, M_2, M_3 sont les symétriques de M par rapport aux milieux des côtés de ABC, les droites AM_1, BM_2, CM_3 concourent au complémentaire de M.

arcs infiniment petits simultanés décrits par les points M et I

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}m.d\omega \qquad d(\mathrm{I}) = \mathrm{I}i.d\omega,$$

M*m* et I*i* étant les normales aux courbes U et V, limitées aux perpendiculaires A*m* et B*i* aux rayons vecteurs AM et BI.

Mais la droite MI se déplaçant parallèlement à elle-même, on a

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{I})} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{IT}} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{I}}}{\sin \widehat{\mathrm{M}}}.$$

Par suite,

$$\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{I}i} = \frac{\sin \widehat{\mathrm{I}}}{\sin \widehat{\mathrm{M}}},$$

ou

$$\mathrm{M}m.\sin \widehat{\mathrm{M}} = \mathrm{I}i.\sin \widehat{\mathrm{I}}\ ;$$

c'est-à-dire que *les projections des normales* Mm *et* Ii *sur* MI *sont égales,* d'où la construction immédiate de l'une des normales lorsque l'on connaît l'autre.

Dans le cas où la courbe U est une parabole dont l'axe passe en A, perpendiculairement à AB, la courbe V, ainsi que vous l'avez remarqué, est un *trident de Newton.* On a donc ainsi une construction simple de la normale à cette dernière courbe.

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Voulez-vous aussi adresser tous mes remerciements à mon jeune Camarade, M. d'Ocagne. Du moment qu'il s'agit d'une construction *sur le chantier,* je suis incompétent, et mes objections ne subsistent plus.

BIBLIOGRAPHIE

Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral, par J. PAULY, ingénieur civil, etc.... (Librairie polytechnique, Baudry et Cie, 15, rue des Saints-Pères, Paris. — Prix 7 fr. 50 c.

On sait que les derniers programmes de l'École Polytechnique ont ouvert la porte aux premiers principes du calcul différentiel et du calcul intégral. En se reportant à la publication de la librairie Croville-Morant (*Questions d'examens*, 1886) on peut rapidement se convaincre de l'importance qu'ont prise, dans les examens d'admission à cette école, les exercices élémentaires, sur ces deux calculs. A ce point de vue, tout au moins, le livre de M. Pauly nous paraît devoir être consulté avec utilité par les élèves de mathématiques spéciales. Les principes y sont exposés avec clarté; de plus, l'ouvrage renferme de nombreuses et intéressantes applications sur les rectifications, les aires, les volumes, les centres de gravité, etc. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

6. — *Si la normale δ en un point* M *mobile sur une surface* Σ *rencontre constamment une droite fixe* Δ, Σ *est une surface de révolution dont l'axe est la droite* Δ.

Prenons des axes rectangulaires, Δ étant l'axe des z, et menons par M un plan perpendiculaire à Δ; ce plan coupe Σ suivant une courbe U qui se projette, en vraie grandeur, sur le plan xoy; soit u cette projection. La tangente δ' à U, au point M, et δ, forment un angle droit; δ' étant parallèle à yox cet angle se projette sur ce plan, suivant un angle droit.

On conclut de là, et de ce fait que δ rencontre oz, que u est une courbe telle que la normale en un point pris sur elle, arbitrairement, passe par un point fixe O.

Cette remarque prouve que u est une circonférence.

En effet, l'équation de la normale étant

$$\frac{X - x}{dy} + \frac{Y - y}{dx} = 0,$$

on a, dans l'hypothèse présente,

$$xdx + ydy = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 = K.$$

D'après cela, la courbe u est une circonférence. Par suite, la courbe U est aussi un cercle ayant son centre sur oz; si l'on observe enfin que oz est perpendiculaire au plan de ce cercle, en un point qui coïncide avec son centre, on voit que Σ est une surface de révolution.

7. — *Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à des plans fixes soit constante; déterminer le centre O de la surface cherchée Σ, et démontrer que ce point est le centre de gravité des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les plans donnés.*

Prenons des axes rectangulaires; l'équation de la surface Σ est

$$\Sigma \frac{(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)^2}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0.$$

Les coordonnées du centre (α, β, γ) vérifient les relations:

$$(H)\begin{cases} \Sigma \dfrac{A_1(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0, \\ \Sigma \dfrac{B_1(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0, \\ \Sigma \dfrac{C_1(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} = 0. \end{cases}$$

D'autre part, les coordonnées x_1, y_1, z_1, du pied H_1 de la perpendiculaire abaissée, de O, sur le plan P_1 correspondant à l'équation

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

sont données par les formules:

$$\frac{\alpha - x_1}{A_1} = \frac{\beta - y_1}{B_1} = \frac{\gamma - z_1}{C_1} = \frac{-(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité des points H; en supposant que les plans donnés soient en nombre égal à m, on a

$$m\xi = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = m\alpha + \Sigma \frac{A_1(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)}{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.$$

En comparant ce résultat avec la première des équations (H) on voit que $\xi = \alpha$; on trouve de même $\eta = \beta$ et $\zeta = \gamma$; le point O est donc le centre de gravité des points H.

8. — *Soient α, β, γ; α', β', γ' les cosinus directeurs de deux directions principales; on sait que*

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0; \qquad (1)$$

en déduire que l'équation en S *a ses racines réelles.*

Si l'équation en S avait une racine imaginaire S', (l'équation de la quadrique considérée étant, bien entendu, à coefficients réels), cette équation en S admettrait aussi une seconde racine imaginaire conjuguée S''.

Les expressions correspondantes $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$; seraient, deux à deux, imaginaires conjuguées et l'on pourrait poser

$$\alpha = a + bi, \qquad \beta = c + di, \qquad \gamma = e + fi,$$
$$\alpha' = a - bi, \qquad \beta' = c - di, \qquad \gamma' = e - fi.$$

D'après cela, l'égalité (1) deviendrait

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 0, \text{ etc....}$$

Cette démonstration est due à M. A. Buchheim, (*Messenger of Mathematics*, 1884); nous l'avons empruntée à *Mathesis* (nº de mars 1887, p. 63).

9. — *Prendre la dérivée, par rapport à* S, *de la fonction* $\Delta(S)$,

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix}.$$

En développant $\Delta(S)$, on sait que l'on a

$$\Delta(S) = (A - S)(A' - S)(A'' - S) + 2BB'B'' - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2 - (A'' - S)B''^2,$$

et, par suite,

$$\Delta'(S) = B^2 - (A' - S)(A'' - S) + B'^2 - (A'' - S)(A - S) + B''^2 - (A - S)(A' - S).$$

Ce résultat peut s'écrire sous la forme

$$\Delta'(S) = -\begin{vmatrix} A'-S & B \\ B & A''-S \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A''-S & B' \\ B' & A-S \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A-S & B'' \\ B'' & A'-S \end{vmatrix};$$

mais la question posée a pour objet l'établissement direct de cette égalité, le déterminant $\Delta(S)$ n'étant pas développé en mineurs. En d'autres termes, on propose, d'une façon générale, de *trouver la dérivée d'un déterminant.*

Prenons d'abord un déterminant du second ordre et soit

$$U = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

A, B, C, D désignant des fonctions d'une variable x.

Nous avons

$$U = AD - BC,$$

et, par conséquent,

$$U' = AD' + DA' - BC' - CB',$$

ou

$$U' = \begin{vmatrix} A & B' \\ C & D' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & B \\ C' & D \end{vmatrix}.$$

La loi observée ici, sur ce cas simple, est générale; elle donne lieu à l'énoncé suivant :

Pour prendre la dérivée d'un déterminant dont les éléments sont des fonctions d'une variable x, *on écrit qu'elle est égale à une somme de déterminants déduits, du déterminant proposé, en prenant toutes les colonnes, à l'exception d'une seule et en substituant à celle-ci une colonne dont les éléments sont égaux aux dérivés des termes de la colonne envisagée.*

En supposant la loi vraie pour un déterminant d'ordre $(n - 1)$, on reconnaît, sans difficulté, qu'elle subsiste pour un déterminant d'ordre n; la loi que nous venons d'énoncer est donc générale.

QUESTION 20

Solution par M. X. BARTHE.

On considère une surface fixe du second degré et des surfaces homothétiques du second degré circonscrites à la première. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à ces surfaces.

Prenons, par exemple, l'ellipsoïde rapportée à ses axes principaux :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des ellipsoïdes homothétiques *(et concentriques)* (*), est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda = 0.$$

Le cône ayant pour sommet le point (x, y_0, z_0) et circonscrit à ces surfaces aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - \lambda\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - \lambda\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \lambda\right)$$
$$- \frac{2xyx_0z_0}{a^2b^2} - \frac{2xzx_0y_0}{a^2c^2} - \frac{2yzy_0z_0}{b^2c^2} + \cdots = 0.$$

Pour qu'il soit de révolution, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{a^2}\left(- \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - \lambda\right) = \frac{1}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - \lambda\right)$$
$$= \frac{1}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - \lambda\right)$$

éliminant λ entre ces équations, et rendant les coordonnées courantes, on a, pour le lieu,

$$\frac{x^2}{a^2}(b^2 - c^2) + \frac{y^2}{b^2}(c^2 - a^2) + \frac{z^2}{c^2}(a^2 - b^2) = 0.$$

C'est un cône réel ayant l'origine pour sommet.

QUESTION 125

Solution, par M. Ferval, élève au Lycée Henri IV.
(Classe de M. Macé de Lépinay.)

Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires Ox, Oy; *trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine.*

La courbe est du huitième degré; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable :

$$\frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega \quad (**).$$

(*) Condition évidemment oubliée dans l'énoncé. G.-L.

(**) Énoncé rectifié; une erreur d'impression avait fait écrire

$$\frac{p}{\rho} = 1 - 4 \cos \omega.$$

Déduire de cette équation les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe. G.-L.

Prenons les deux droites Ox, Oy pour axes de coordonnées, l'équation de la parabole tangente aux deux axes en leurs points de rencontre A, B avec une droite mobile

$$ux + vy - 1 = 0,$$

est
$$(ux + vy)^2 - 2(ux + vy) + 1 = 0.$$

En appliquant l'égalité bien connue

$$p^2 = \frac{-\Delta}{(A + A')^3},$$

qui donne en axes rectangulaires le paramètre p d'une parabole, on a ici :

$$p^2 = \frac{4u^2v^2}{(u^2 + v^2)^3}. \qquad (1)$$

Observons que les coordonnées x, y de l'extrémité du diamètre passant par l'origine sont les moitiés de celles du milieu de AB, c'est-à-dire :

$$x = \frac{1}{4u} \qquad y = \frac{1}{4v}. \qquad (2)$$

Remplaçons dans (1), qui n'est autre que l'équation tangentielle de l'enveloppe de AB, u et v par leurs valeurs, nous obtenons le lieu cherché :

$$p^2 = \frac{64x^4y^4}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Si l'on passe en polaires, l'équation du lieu devient :

$$p^2 = 64.\rho^2 \sin^4 \omega \cos^4 \omega = 4\rho^2 \sin^4 2\omega = \rho^2(1 - \cos 4\omega)^2$$

ou

$$\frac{p}{\rho} = \pm (1 - \cos 4\omega).$$

La courbe qui correspond à cette équation est constituée par quatre branches paraboliques doublement infléchies. Les axes et les bissectrices sont des axes de symétrie et il suffit de construire la partie de la courbe qui correspond à la variation de ω, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{4}$. Les autres branches se déduisent, de celle qu'on obtient ainsi, par symétrie.

Cherchons les points d'inflexion.

Ils sont donnés par la résolution de l'équation

$$\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0,$$

qui donne, ici,

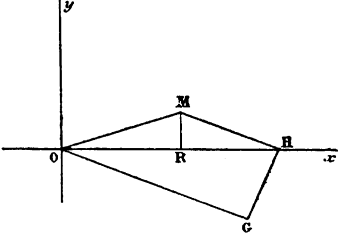
$$\cos 4\omega = -\frac{1}{15}.$$

On peut ainsi trouver facilement le plus petit arc qui correspond à cette formule et qui est voisin de 24°. Les huit points d'inflexion que l'on peut trouver avec la règle et le compas sont situés sur un cercle de centre O et de rayon égal à $\frac{15}{16}p$.

NOTA. — Autres solutions par MM. Lucien Marchis, élève au lycée de Rouen; Hugon, à Poligny; Vacquant, ancien élève de mathématiques spéciales à Lille.

QUESTION 147

Un quadrilatère variable OGHM *se déplace et se déforme suivant les conditions suivantes :*



1° Le point O *est fixe ;*

2° La longueur OG *est constante ;*

3° L'angle G *est droit ;*

4° Le côté HM *est à chaque instant parallèle à* OG

5° L'angle GOM *varie de grandeur et de position, mais il a toujours même bissectrice.*

Trouver le lieu du sommet M.

Prenons le point O, pour origine ; la bissectrice fixe, pour axe ox; et, pour axe oy, une perpendiculaire à ox.

Ayant posé :

$$\text{OM} = \rho, \qquad \text{MO}x = \omega, \qquad \text{OG} = a$$

en observant que le point M, d'après la construction indiquée,

se projette au milieu de OH, on a

$$OR = \frac{OH}{2} = \rho \cos \omega. \qquad (1)$$

D'ailleurs, le triangle OGH donne

$$OH = \frac{a}{\cos \omega}; \qquad (2)$$

on a donc, en comparant (1) et (2),

$$\rho = \frac{a}{2 \cos^2 \omega}.$$

C'est l'équation polaire du lieu. La courbe correspondante se construit facilement ; elle est constituée par deux branches paraboliques.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud,** professeur de Mathématiques spéciales au Lycée du Havre.

(*Suite*, voir p. 91.)

On dit souvent que Descartes a substitué des équations à des formes de lignes ou de surfaces. Rien n'est plus faux; une forme, par elle-même, ne peut entrer dans les calculs que si sa définition était déjà mathématique, c'est à-dire que si on connaissait déjà une propriété de quantité appartenant au point ou à la ligne dont le mouvement engendre la figure. L'ellipse est le lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Le cône de révolution est engendré par une droite qui fait un angle constant avec une droite fixe, qu'elle rencontre en un point fixe. Il n'est pas de courbes ou surfaces géométriques définies par leur forme. Descartes n'a donc pas eu à substituer des équations, à la forme, soit dans les définitions, soit dans

l'étude des êtres géométriques, mais seulement à trouver une méthode générale qui permît de dégager simplement et de traduire par des équations algébriques les propriétés de quantités qui faisaient des figures de la géométrie des êtres mathématiques.

Mais laissons-là ces réflexions qui nous entraîneraient trop loin. Il nous paraît suffisamment établi maintenant que la croyance à l'impossibilité logique de faire coïncider la limite d'une variable, avec un état particulier de cette variable, est une erreur absolue et nous pourrons envisager maintenant, sans craindre aucun malentendu sur la signification du problème, la question de savoir si la variable atteindra cet état particulier qui est la limite. Cette question est absolument étrangère à la notion mathématique. Il est plus que dangereux, il est contraire à l'esprit même des raisonnements mathématiques, d'en faire dépendre la solution de l'idée de limite. Et il faut approuver aussi peu la tendance de quelques-uns à parler de l'impossibilité pour la variable d'atteindre sa limite, que l'idée, plus communément répandue, suivant laquelle la limite est le terme effectif d'une variation.

Il suffira, pour le montrer, d'insister un peu sur le sens de cette question. On peut l'entendre de deux façons: ou bien on suppose réalisée la variation de la grandeur étudiée, et on se demande s'il arrivera un instant, dans le temps, où elle prendra la valeur particulière, qui est celle de la limite; ou bien l'esprit cherche à concevoir la génération même de la grandeur limite à l'aide de la variable et se demande s'il peut reconstituer cette limite, par une série illimitée d'approximations successives.

Voyons la première de ces questions. Avant tout, elle exige pour la réalisation objective de la variation, qu'on se donne un certain nombre de circonstances précises, dont la nature déterminera la solution du problème, en particulier une certaine loi liant au temps la valeur de la variable dont on dispose. Celle-ci devient fonction du temps et la question est déplacée. Il s'agit de savoir si, le temps s'écoulant, elle parviendra à la valeur qui fait prendre, à la première grandeur, sa valeur limite.

Exemple : La variable sera la longueur OA_n portée sur Ox à partir du point O, qui serait égale à la somme des n premiers termes de la progression

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\cdots$$

On sait que cette somme a une limite, ici égale à la fraction 10/9, quand n croît indéfiniment. L'extrémité A_n de la longueur OA_n a donc pour limite un certain point L situé à 10/9 de mètre de l'origine O. Le point A_n arrivera-t-il en L? Supposons, par exemple, que la vitesse de A_n change, à chaque élément nouveau du chemin qu'on fait décrire, de façon qu'il les parcoure tous dans des temps égaux : le mobile A_n ne parviendra jamais en L. Au contraire qu'il marche d'un mouvement uniforme de vitesse 1 de façon à parcourir chaque élément nouveau en 10 fois moins de temps que le précédent : il est clair qu'il aura parcouru 10/9 de mètre en 10/9 de seconde.

Ces exemples suffiront, je pense, à bien établir que la ques- de savoir si la variable parviendra réellement, à un instant, plus ou moins éloigné dans l'avenir, au terme de sa variation, est absolument distincte du fait de l'existence de la limite. *(A suivre.)*

QUESTIONS PROPOSÉES

221. — Mener, à une circonférence fixe, une tangente Δ telle que le segment AA′ intercepté sur cette droite, par deux droites fixes D, D′, ait une longueur donnée.

A propos de ce problème, généralisation de celui de Pappus, on cherchera le lieu du point M obtenu en traçant par A une parallèle à D′, et par A′ une parallèle à D.

Ce lieu est une quartique. On déterminera les formes diverses affectées par cette courbe.

Enfin, on fera voir que le problème proposé se résout complètement par le tracé d'ellipses et d'hyperboles.

(Ph. F.)

222. — On considère un triangle AOB rectangle en O; par les points A et B on mène deux droites rectangulaires mobiles qui se coupent en S et l'on imagine une parabole P, de sommet S, ayant pour axe SA et passant par O.

1° La tangente en O, à P, rencontre AS en un point I; démontrer que le lieu décrit par I est une circonférence.

2° L'enveloppe des paraboles P est une cissoïde oblique.

(G. L.)

223. — Lieu des centres des cercles coupant l'ellipse en quatre points tels que trois d'entre eux soient les sommets d'un triangle équilatéral. Ce lieu est une ellipse.

Enveloppe de la droite qui joint le centre au quatrième point, et lieu du milieu de cette droite; on trouvera pour l'enveloppe demandée une développée d'ellipse; le dernier lieu est une ellipse. *(X.)*

224. — Étant donnés, dans un plan, deux droites et un point fixe, on fait tourner une droite autour de ce point. Trouver le lieu des points de contact, situés sur cette droite, des circonférences tangentes aux deux droites fixes données et à la droite mobile. *(Ernest Lebon.)*

225. — Soient P_1 et P_2 deux points fixes pris sur une parabole, P un point variable sur la même courbe. Les droites PP_1 et PP_2 coupent le diamètre conjuguée de la corde P_1P_2 en des points qui sont symétriques par rapport au point où ce diamètre coupe la parabole.

(D'Ocagne.)

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10828-7.

NOTE D'ANALYSE

Par M. **Griess**, professeur de Mathématiques au Lycée d'Alger.

On trouve dans Desboves (*Questions d'Algèbre*, p. 252) l'énoncé suivant :

« **Théorème.** — n *étant le nombre des termes d'une progression arithmétique dont la raison est* r, S_p *la somme des puissances* p *de ces termes, si l'on fait tendre* n *vers l'infini, la fraction* $\frac{S_p}{n^{p+1}}$ *aura pour limite* $\frac{1^p}{p+1}$ p *étant entier et positif.* »

Le théorème précédent était connu de Pascal qui l'a donné dans son *Traité sur la sommation des puissances numériques*, sous une forme différente, mais au fond équivalente.

L'objet de cette note est d'appliquer le théorème à la progression formée par les n premiers nombres entiers, et de montrer qu'il est vrai, quelle que soit la valeur, entière ou fractionnaire, positive ou négative de p, sous la seule réserve $p + 1 > 0$.

Théorème. — *Si l'on pose* $S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, p *étant quelconque, mais tel que* $p + 1 > 0$; *on a*

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}, \text{ pour } n \text{ infini.}$$

Supposons d'abord p entier. D'après une méthode connue, on a pour déterminer S_p l'équation

$$(1) \quad (n+1)^{p+1} = 1 + \frac{p+1}{1} S_p + \frac{(p+1)p}{1 . 2} S_{p-1} + \ldots + S_0$$

Comme $S_0 = n$ $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, cette égalité montre que S_p est une fonction entière de degré $p + 1$, par rapport à n; S_{p-1} une fonction entière, de degré p, etc.

Donc

$$\lim \frac{S_{p-1}}{n^{p+1}} = 0 \qquad \lim \frac{S_{p-2}}{n^{p+1}} = 0 \quad \text{etc.}$$

Divisons les deux membres de l'égalité (1) par n^{p+1} et faisons croître n indéfiniment, il vient

$$1 = (p+1) \lim \frac{S_p}{n^{p+1}},$$

ou

$$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Remarquons que, de l'égalité (1), on conclut

$$(p+1)\frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{(n+1)^{p+1}-1}{n^{p+1}} - \dots$$

Donc $\frac{S_p}{n^{p+1}}$ tend vers sa limite, en lui restant inférieure.

Prenons maintenant le cas où p est quelconque.

Posons

$$F(n) = \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1^p + 2^p + \dots n^p}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^p + 1\right]$$

ou

$$nF(n) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^p + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^p$$

$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}$ sont inférieures à 1; en supposant $p+1>0$, on sait qu'on peut développer chaque terme du second membre en série. On a donc

$$1 = 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = 1 - p.\frac{1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^p = 1 - p.\frac{2}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{2}{n^2} + \dots$$

. . . .

$$\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^p = 1 - p.\frac{n-1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{(n-1)^2}{n^2} + \dots$$

Chacune des séries qui figurent dans le second membre est convergente ainsi que la série de ses modules; par suite, leur somme, faite d'une façon quelconque, donne encore une série convergente. Donc, en additionnant

$$nF(n) = n - p.\frac{S'_1}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{S'_2}{n^2} - \dots$$

ou

$$F(n) = 1 - p.\frac{S'_1}{n^2} + \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{S'_2}{n^3} - \ldots \qquad (2)$$

en posant

$$S'_h = 1^h + 2^h + \ldots + (n-1)^h$$

on a évidemment

$$\frac{S_h - S'_h}{n^{h+1}} = \frac{1}{n}.$$

$\frac{S'_h}{n^{h+1}}$ tend donc aussi vers $\frac{1}{h+1}$, en lui restant inférieur, quand n croît indéfiniment.

Cela posé, les termes de la série (2) sont respectivement inférieurs à ceux de la série

$$1 - \frac{p}{1.2} + \frac{p(p-1)}{1.2.3} - \ldots \qquad (3)$$

obtenue en faisant croître n au-delà de toute limite dans (2). Nous allons faire voir que cette série est convergente et que la somme est $\frac{1}{p+1}$

En effet, soit x une quantité < 1, on a

$$(1+x)^{p+1} = 1 + \frac{p+1}{1}.x + \frac{(p+1)p}{1.2}x^2 + \frac{(p+1)p(p-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Comme $p + 1 > 0$, on sait que cette série reste convergente pour $x = -1$; on a donc

$$0 = 1 - \frac{p+1}{1} + \frac{(p+1)p}{1.2} - \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{p+1} = 1 - \frac{p}{1.2} + \frac{p(p-1)}{1.2.3} - \ldots$$

Cela posé par un raisonnement analogue à celui qu'on fait pour la série e, on prouve que

$$\lim F(n) = 1 - \frac{p}{2} + \frac{p(p-1)}{1.2.3} - \ldots = \frac{1}{p+1}.$$

Le théorème est donc démontré sous la seule condition

$$p > -1.$$

Si $p < -1$, les séries employées sont toutes divergentes.

Applications :

$$p = 3 \qquad \lim \left[F(n) = \frac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4} \right] = \frac{1}{4}.$$

$$p = \frac{1}{2} \qquad \lim \left[F(n) = \frac{1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right] = \frac{2}{3}.$$

$$p = -\frac{1}{2} \qquad \lim \left[F(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{n} \right] = 2.$$

NOTE SUR L'HYPOCYCLOIDE

A QUATRE REBROUSSEMENTS

Par M. **J. Rat**, élève à l'École Polytechnique.

---

1. — On sait qu'on peut considérer l'hypocycloïde à quatre rebroussements comme l'enveloppe d'une droite de longueur constante glissant entre deux axes rectangulaires. Partant de cette propriété, on arrive à l'équation de la courbe :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - R^{\frac{2}{3}} = 0.$$

On peut donc représenter l'hypocycloïde par les deux équations :

$$x = R\cos^3\varphi,$$
$$y = R\sin^3\varphi.$$

Cela posé, cherchons le coefficient angulaire de la tangente au point de la courbe, caractérisé par le paramètre angulaire φ.

On a, en différentiant :

$$dx = -3R\cos^2\varphi.\sin\varphi.d\varphi,$$
$$dy = 3R\sin^2\varphi.\cos\varphi.d\varphi,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi = -t.$$

La formule $\operatorname{tg}\varphi = t$ donne :

$$\sin\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

et la courbe peut se représenter par les équations :

$$x = \frac{R}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad y = \frac{Rt^3}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où $-t$ représente le coefficient angulaire de la tangente, au point caractérisé par le paramètre t.

L'équation d'une tangente à la courbe est de la forme

$$Y + tX + K = 0.$$

Si l'on exprime que cette droite passe par le point (x, y), on trouve

$$K = -\frac{Rt}{\sqrt{1+t^2}},$$

et l'équation de la tangente au point (x, y) est

$$Y + tX - \frac{Rt}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

2. — Cherchons les valeurs de t correspondant aux tangentes menées à la courbe par un point (x, y) du plan. Cette équation est

$$(1+t^2)(y+tx)^2 - R^2t^2 = 0,$$

ou

$$t^4x^2 + 2t^3xy + t^2(x^2+y^2-R^2) + 2txy + y^2 = 0. \quad (1)$$

Si l'on appelle t_1, t_2, t_3, t_4 les racines de cette équation, on a

$$\Sigma t_1 = \Sigma t_1t_2t_3,$$

ou encore

$$\Sigma(-t_1) = \Sigma[(-t_1)(-t_2)(-t_3)].$$

En se rappelant la signification du paramètre t, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La somme des angles que les quatre tangentes, menées d'un point à la courbe, font avec l'une quelconque des tangentes de rebroussement, est égale à un multiple de* π.

Cette propriété constitue une première analogie entre l'hypocycloïde à quatre rebroussements et l'hypocycloïde à trois rebroussements.

(A suivre.)

SUR UNE FONCTION FACTORIELLE

Par M. **Balitrand**, élève au Lycée de Nismes.

M. E. Cesáro, dans une note publiée dans *Mathesis* (VI, juin 1886, p. 126), s'est occupé, entre autres choses, de la fonction factorielle

$$f(x) = (1 + qx)(1 + q^2x) \dots (1 + q^nx).$$

Nous nous proposons, dans cette petite note, de signaler quelques propriétés de cette même fonction.

On peut remarquer d'abord qu'elle est une généralisation de la formule du binôme; car si l'on fait $q = 1$, on a

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

Soit posé

$$f(x) = (1 + qx)(1 + q^2x) \dots (1 + q^nx) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_px^p + \dots A_nx^n;$$

on a

$$f(qx) = (1 + q^2x)(1 + q^3x) \dots (1 + q^{n+1}x) = A_0 + A_1qx + A_2q^2x^2 + \dots A_pq^px^p + \dots A_nq^nx^n$$

et, par suite,

$$\frac{f(x)}{f(qx)} = \frac{1 + qx}{1 + q^{n+1}x},$$

d'où

$$(1 + q^{n+1}x)f(x) = (1 + qx)f(qx).$$

En égalant les coefficients de x^p dans les deux membres on obtient

$$A_p + q^{n+1}A_{p-1} = q^p(A_p + A_{p-1})$$

ou

$$(1 - q^p)A_p = q^p(1 - q^{n-p+1})A_{p-1}.$$

Dans cette formule, donnons à p les valeurs successives $p - 1$, $p - 2$,... nous trouvons

$$(1 - q^p)A_p = q^p(1 - q^{n-p+1})A_{p-1},$$
$$(1 - q^{p-1})A_{p-1} = q^{p-1}(1 - q^{n-p+2})A_{p-2},$$
$$(1 - q^{p-2})A_{p-2} = q^{p-2}(1 - q^{n-p+3})A_{p-3}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(1 - q)A_1 = q(1 - q^n);$$

d'où

$$A_p = q^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-p+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^p)} = q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n.p}$$

on a donc

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=n} q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n.p}x^p$$

$$= \lambda_{n,0} + q\lambda_{n,1}x + q^3\lambda_{n,2}x^2 \dots q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p}x^p + \dots q^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_{n,n}x^n$$

formule dans laquelle on a d'ailleurs $\lambda_{n,0} = \lambda_{n,n} = 1$.

De même, le produit

$$\varphi(x) \equiv (1 - qx)(1 - q^2x) \dots (1 - q^nx)$$

peut s'écrire :

$$\varphi(x) \equiv \lambda_{n,0} - q\lambda_{n,1}x + q^3\lambda_{n,2}x^2 \dots \pm q^{\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_{n,n}.x^n.$$

Les coefficients λ jouissent de propriétés analogues à celles des coefficients binomiaux. Nous allons les étudier.

1° Deux coefficients λ, consécutifs, vérifient la relation de récurrence suivante

$$\frac{\lambda_{n,p}}{\lambda_{n,p-1}} = \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q^p}; \qquad (1)$$

2° Deux coefficients λ équidistants des extrêmes sont égaux.

En effet si l'on pose

$$\omega_n = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)$$

on a

$$\lambda_{n,p} = \frac{\omega_n}{\omega_p . \omega_{n-p}} \lambda_{n,n-p}. \qquad (2)$$

Cette propriété a été signalée par M. E. Cesáro (*Mathesis*, juin 1886.)

3° Si q est plus petit que l'unité, les coefficients λ vont en augmentant, jusques et y compris le terme du milieu, lorsque n est pair; et, lorsque n est impair, les coefficients λ augmentent, pendant la première moitié du développement.

En effet, la relation (1) prouve que l'inégalité $\lambda_{n,p} > \lambda_{n,p-1}$ est vérifiée, si l'inégalité

$$\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q^p} > 1,$$

a lieu. On a donc, puisque le dénominateur est positif,

$$1 - q^{n-p+1} > 1 - q^p, \qquad \text{ou} \qquad q^{n-p+1} < q^p,$$

et comme les puissances positives d'un nombre positif plus

petit que l'unité diminuent, lorsque l'exposant augmente, il faut que

$$n - p + 1 > p, \quad \text{ou} \quad n + 1 > 2p;$$

d'où

$$p < \frac{n+1}{2}.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer. Si n est pair ($n = 2m$) on doit avoir

$$p < m + \frac{1}{2};$$

si n est impair ($n = 2m + 1$) on doit avoir

$$p < m + 1.$$

En observant que p est nécessairement entier, on obtient alors le résultat énoncé

4° Si l'on observe que l'on a

$$f_n(x)\, f_n(q^n x) = f_{2n}(x),$$

et, si l'on égale les coefficients de x^n dans les deux membres, en observant que les coefficients équidistants des extrêmes sont égaux, on obtient l'égalité

$$1 + \lambda_{n,1}^2 q + \lambda_{n,2}^2 q^4 + \lambda_{n,3}^2 q^9 + \ldots = \lambda_{2n,n} \qquad (3)$$

donnée par M. E. Cesáro (*loc. cit.*).

Il est facile de voir que $q^{p(p+1)}\lambda_{n,p}$ représente, précisément, la somme des produits p à p des termes de la progression géométrique dont le premier terme est q, la raison q, et le nombre des termes n; somme que nous designerons par S_p^n. L'égalité, facile à vérifier,

$$S_p^n = S_p^{n-1} + q^n S_{p-1}^{n-1},$$

donne immédiatement

$$S_p^n = qS_{p-1}^{n-1} + q^{n-1}S_{p-1}^{n-2} + \ldots + q^{p+1}S_{p-1}^{p} + q^p S_{p-1}^{p-1}$$

ou

$$q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p} = q^n . q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{n-1,p-1} + q^{n-1} . q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{n-2,p-1} \ldots$$
$$q^{p+1} . q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{p,p-1} + q^p . q^{\frac{p(p-1)}{2}}\lambda_{p-1,p-1}$$

ou

$$q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n,p} = q^{n-p} . q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n-1,p-1} + q^{n-p-1} . q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{n-2,p-1} \ldots$$
$$+ q . q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{p,p-1} + q^{\frac{p(p+1)}{2}}\lambda_{p-1,p-1} \ldots$$

ou, en divisant par $q^{\frac{p(p+1)}{2}}$, quantité positive,

$$\lambda_{n,p} = q^{n-p}\lambda_{n-1,p-1} + q^{n-p-1}\lambda_{n-2,p-1}$$
$$+ \ldots q\lambda_{p,p-1} + \lambda_{p-1,p-1}. \qquad (4)$$

Enfin, on vérifie aisément l'égalité

$$\lambda_{n,p} = q^p\lambda_{n-1,p} + \lambda_{n-1,p-1},$$

et, en donnant à n les valeurs successives : $n, (n-1),\ldots (n-p)$; et à p les valeurs successives : $p, (p-1) \ldots 1, 0$, on a

$$\lambda_{n,p} = q^p\lambda_{n-1,p} + \lambda_{n-1,p-1},$$
$$\lambda_{n-1,p-1} = q^{p-1}\lambda_{n-2,p-1} + \lambda_{n-2,p-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{n-p+1,1} = q\lambda_{n-p,1} + \lambda_{n-p,0}.$$

En multipliant membre à membre et en remarquant que $\lambda_{n-p,o} = 1$, on a la formule

$$\lambda_{n,p} = 1 + q\lambda_{n-p,1} + q^2\lambda_{n-p+1,2} + \ldots$$
$$+ q^{p-1}\lambda_{n-2,p-1} + q^p\lambda_{n-1,p}. \qquad (6)$$

Remarque. — Au concours général de 1879, on a proposé l'étude de la fonction

$$F(x) \equiv (1 + qx)(1 + q^3x) \ldots$$
$$\ldots (1 + q^{2n-1}x)\left(1 + \frac{q}{x}\right)\left(1 + \frac{q^3}{x}\right) \ldots \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{x}\right).$$

La solution de cette question découle assez simplement des considérations précédentes.

En effet on a

$$F(x) \equiv \varphi(x).\psi(x)$$

en posant

$$\varphi(x) \equiv (1 + qx)(1 + q^3x) \ldots (1 + q^{2n-1}x)$$
$$\psi(x) \equiv \left(1 + \frac{q}{x}\right)\left(1 + \frac{q^3}{x}\right) \ldots \left(1 + \frac{q^{2n-1}}{x}\right).$$

Considérons la fonction $\varphi(x)$. En remplaçant x par q^2x, on trouve

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(q^2x)}, = \frac{(1 + qx)}{(1 + q^{2n+1}x)}.$$

En désignant par A_p, le coefficient de x^p dans le développement de $\varphi(x)$, on déduit, de cette égalité,

$$A_p(1 - q^{2p}) = q^{2p-1}(1 - q^{2(n-p+1)})A_{p-1}.$$

En donnant à p les valeurs successives $(p-1), (p-2) \ldots$ on trouve

$$A_p = q^{2p}\frac{(1 - q^{2n})(1 - q^{2(n-1)}) \ldots (1 - q^{2(n-p+1)})}{(2 - q^2)(1 - q_p) \ldots (1 - q^{2p})} = q^{p^2}\mu_{n,p}$$

et l'on peut remarquer que $\mu_{n,p}$ représente précisément $\lambda_{n,p}$, lorsqu'on a remplacé q par q^2.

On a donc

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p} \cdot x^p ;$$

de même

$$\psi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p} \frac{1}{x^2}$$

et par suite

$$F(x) = \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p} x^p \times \sum_{p=0}^{p=2n-1} q^{p^2}\mu_{n,p} \frac{1}{x^p}.$$

Il suffit d'effectuer la multiplication pour trouver les coefficients des différentes puissances de x, depuis $x^{-(n+1)}$ jusqu'à x^{n+1}, ce qui n'offre aucune difficulté.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 127).

21. Points algébriquement associés (M, M_a, M_b, M_c). — Considérons le point M(α, β, γ) dont les coordonnées vérifient les égalités :

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}.$$

Nous appellerons *points algébriquement associés* au point M et nous noterons par M_a, M_b, M_c, les points qui se déduisent de M en changeant le signe du dénominateur d'une des coordonnées. D'après cela, les coordonnées des points algébriquement associés à M (*) seront telles que :

(*) M. J. Neuberg avait créé le terme de *points associés* (*M.* 1881, p. 173) pour désigner les points dont il est question ici, et M. Lemoine dans plusieurs notes avait adopté ce terme. M. de Longchamps trouvant le terme de *associé* trop général a proposé celui de *points adjoints* ou plus exactement de *points algébriquement adjoints*. Nous conserverons le terme de

$$M_a \qquad \frac{\alpha}{-A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

$$M_b \qquad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{-B} = \frac{\gamma}{C}$$

$$M_c \qquad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{-C}.$$

Ces points sont faciles à construire. En effet, si nous prenons les conjugués harmoniques des points M′, M″, M‴ où AM, BM, CM coupent BC, CA, AB, nous avons trois points, μ', μ'', μ''', tels que les droites $A\mu'$, $B\mu''$, $C\mu'''$ se coupent deux à deux aux points M_a, M_b, M_c cherchés.

L'un quelconque des quatre points M, M_a, M_b, M_c a, pour algébriquement associés, les trois autres.

On démontre facilement que :

Les triangles ABC, M_a, M_b, M_c sont homologiques et ont M pour centre d'homologie.

Les quatre droites M_bAM_c, AC, AM, AB formant un faisceau harmonique. De même, pour les quatre droites (M_cBM_a, BA, BM, BC) et (M_aCM_b, CB, CM, CA).

On voit immédiatement que si la position du point M est déterminée par certaines propriétés géométriques des rapports que les points M′, M″, M‴ déterminent sur les côtés du triangle, les points M_a, M_b, M_c auront une détermination semblable, et celles des propriétés de M qui ne dépendront que de ces rapports donneront lieu à des propriétés analogues des points M_a, M_b, M_c, donc :

Chaque fois qu'on étudiera un point remarquable M du triangle, on devra chercher des propriétés analogues pour ses points algébriquement associés. Nous donnerons, dans la suite, plusieurs applications de cette idée (*).

---

associé en y joignant le mot *algébriquement* qui indique de quelle manière est faite l'association ; mais on peut dire indifféremment *points algébriquement associés* ou *points algébriquement adjoints*.

(*) On peut consulter sur les points algébriquement associés :
E. Lemoine. — *Sur les points associés du plan du triangle*, (*A. F. Blois*, 1884. — *J. S.* 1885, p. 193, 217). G. de Longchamps. — (*J. E.*, 1886, pp. 129-130.)

22. Points Brocardiens (M, M_δ, M_ρ). — A un point donné $M(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

on peut associer deux autres points que nous désignerons par les lettres M_δ, M_ρ (δ et ρ, initiales des mots : *direct* et *rétrograde*) dont les coordonnées vérifient les égalités

$$M_\delta \qquad B\alpha' = C\beta' = A\gamma'$$
$$M_\rho \qquad C\alpha'' = A\beta'' = B\gamma''$$

et que M. de Longchamps (*J. E.* 1886, p. 229) appelle *Points Brocardiens* correspondant à M. Les points Brocardiens se construisent facilement en employant la méthode suivante due à M. E. Lemoine (*N. A. M.* 1885, p. 202; — *A. F. Grenoble*, 1885.)

Menons :

$M'\rho'$ parallèle à CA,
$M''\mu'$ parallèle à AB,
$M'''\nu'$ parallèle à BC.

Les droites $A\mu'$, $B\nu'$, $C\rho'$ concourent en un point M_δ qui est l'un des points Brocardiens correspondant à M. Pour obtenir le second point Brocardien M_ρ il suffit d'effectuer le tracé en sens inverse, mener $M'\rho''$ parallèle à BA, etc.

En continuant à généraliser une idée due à M. Lemoine (*A. F. Grenoble* 1886), on peut dire, et c'est ce que nous ferons dans la suite, que M_δ *est le point Brocardien direct* et que M_ρ *est le point Brocardien rétrograde* correspondant au point donné M (*).

23. Points isobariques (M, M'_i, M''_i) **et points semi-réciproques** (M, M'_j, M''_j, M'''_j). — A un point donné M (A, B, C) on peut faire correspondre cinq points que nous désignerons par M'_i, M''_i, M'_j, M''_j, M'''_j) dont les coordonnées sont :

(*) Voir sur les *points Brocardiens :*

E. Lemoine. — *A. F. Grenoble*, 1885. — Ce mémoire forme le supplément du numéro de mai 1886 de *Mathesis.*

G. de Longchamps. — *Généralités sur la géométrie du triangle* (*J. E.* 1886, p. 229-231).

M	A	B	C	M_j	A	C	B
M'_i	B	C	A	M''_j	C	B	A
M''_i	C	A	B	M'''_j	B	A	C

que nous appellerons avec M. J. Neuberg (*J. E.* 1886, p. 231) *groupe isobarique* associé à un point donné M. Plus particulièrement nous dirons que :

Les deux points M'_i, M''_i sont les *points isobariques* correspondant à M.

Les trois points M_j, M''_j, M'''_j, sont les *points semi-réciproques* associés à M (*).

Les points isobariques et les points semi-réciproques ont les mêmes coordonnées barycentriques, par conséquent, les deux triangles $MM'_iM''_i$, $M'_jM''_jM'''_j$ ont même centre de gravité que le triangle de référence (**). Dans les points isobariques, le point milieu de $M'_iM''_i$, est le point complémentairede M. De même, le point milieu de $M''_jM'''_j$ est le complémentaire de M'_j.

La construction des points isobariques est très facile; il suffit, en effet, d'observer que ce sont les points réciproques des points Brocardiens.

Pour construire les points semi-réciproques, on remarque : 1° que les deux points M, M'_j formant avec BC deux triangles de même aire, la droite MM'_j est parallèle à BC ; 2° que les droites AM, AM'_j rencontrent BC en deux points isotomiques. Connaissant M, on construit donc facilement le point M'_j.

(A suivre.)

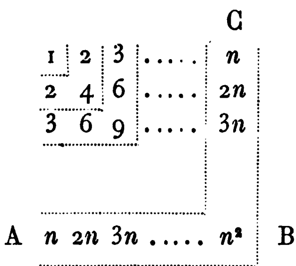
(*) Voir sur les *points isobariques* et *semi-réciproques :*
G. de Longchamps. — *J. E.* 1886, p. 278 (note au bas de la page).

(**) C'est de cette propriété que M. de Longchamps a tiré le nom de *points isobariques*. Les points que nous nommons, avec M. Neuberg, *points semi-réciproques*, ont été appelés par M. G. de Longchamps *points isobariques de seconde espèce*. On peut adopter la dénomination de M. de Longchamps ou employer celle de M. Neuberg, également bien. Le terme de *semi-réciproque* provient de ce que les coordonnées de M'_j peuvent se mettre sous la forme $\left(\frac{A}{BC}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}\right)$; les deux dernières sont justement celles du réciproque de M. (*J. E.* 1886, p. 278.)

QUESTIONS D'EXAMEN

10. — *Établir, à priori, la formule qui donne la somme des cubes des* n *premiers nombres.*

Imaginons la table de Pythagore pour les n premiers nombres :



En ajoutant les nombres renfermés dans les colonnes verticales, on a, évidemment,

$$S_n^1, \quad 2S_n^1, \quad \dots \quad nS_n^1$$

ou

$$(1 + 2 + \dots + n)S_n^1 = (S_n^1)^2.$$

D'autre part, comptons les nombres renfermés dans la partie ABC de la table ; leur somme est égale à

$$(n + 2n + \dots + n^2) + [n + 2n + \dots + (n - 1)n]$$

ou

$$n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n^3.$$

Ainsi

$$(S_n^1)^2 = S_n^3.$$

11. — *Une conique* Γ *est inscrite dans un angle* yox; *une tangente* Δ *rencontre* ox *et* oy *aux points* A *et* B; *trouver le lieu* ζ *décrit par le milieu* I *de* AB.

En posant $oA = u$, $oB = v$ et en désignant par x et y les coordonnées du point I, on a

$$u = 2x, \qquad v = 2y.$$

Or A et B décrivent sur ox et oy deux divisions homographiques ; on a donc

$$Auv + Bu + Cv + D = 0, \quad \text{etc.}$$

REMARQUE. — Si Γ est située d'une façon quelconque par rapport aux axes ox, oy, on partira de l'équation générale tangentielle des coniques.

$$\begin{vmatrix} & & & U \\ & \Delta & & V \\ & & & W \\ U & V & W & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette égalité, on sait que Δ représente le discriminant de l'équation de Γ, et que la droite Δ, correspondant à l'égalité

$$Ux + Vy + Wz = 0,$$

est tangente à Γ. On a donc pour l'équation de ζ

$$\begin{vmatrix} & & & \frac{1}{2x} \\ & \Delta & & \frac{1}{2y} \\ & & & -1 \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{2y} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ζ est, généralement, du quatrième degré.

12. — *Que représente l'équation*

$$f\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}\right) = 0,$$

P, Q, R, S *étant des fonctions linéaires quelconques des coordonnées* x, y, z.

En posant

$$P = \lambda Q, \qquad R = \mu S,$$

et en considérant les solutions, en nombre infini, réelles ou imaginaires, de l'équation

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

on voit que, à l'égalité proposée, correspond une surface réglée.

CORRESPONDANCE

Sur une identité de Jacobi.

Si l'on considère le tableau des neuf cosinus de trois directions rectangulaires Ox, Oy, Oz avec trois autres directions rectangulaires Ox', Oy', Oz',

O	x'	y'	z'
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

l'équation du cône passant par les six arêtes des deux trièdres trirectangles est

$$\frac{a_1a_2a_3}{x} + \frac{b_1b_2b_3}{y} + \frac{c_1c_2c_3}{z} = 0;$$

si l'on chasse les dénominateurs et si l'on multiplie par 2, l'équation en s correspondante est

$$s^3 - Is^2 + Js - \delta = 0,$$

équation dans laquelle $I = 0$ et

$$J = (a_1a_2a_3)^2 + (b_1b_2b_3)^2 + (c_1c_2c_3)^2,$$
$$\delta = 2(a_1a_2a_3)(b_1b_2b_3)(c_1c_2c_3).$$

Dans le second système d'axes, on obtient l'équation du cône et l'équation en s correspondante

$$s^3 - I's^2 + J's - \delta' = 0,$$

en échangeant les colonnes et les lignes du tableau des cosinus; mais on a $\delta = \delta'$, par suite $J = J'$; en d'autres termes

$$(a_1a_2a_3)^2 + (b_1b_2b_3)^2 + (c_1c_2c_3)^2 = (a_1b_1c_1)^2 + (a_2b_2c_2)^2 + (a_3b_3c_3).$$

Ed. Lucas.

Nous avions demandé (*Journal*, 1886 ; p. 215 la date d'un ouvrage de Tartaglia (*): *Generale trattato di numeri e misure*, M. Vigarié nous signale, à ce propos, une note de Terquem (*Nouvelles Annales*, 1860 ; Bulletin de bibliographie, p. 14), d'après laquelle l'ouvrage en question est de 1546.

Mais il y a là, vraisemblablement, une faute d'impression et il faut lire, croyons-nous, 1556. Cette dernière date a été donnée par le prince Boncompagni dans un ouvrage publié à Rome en 1857 et portant pour titre : *Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali*. A la page 289 de ce livre on trouve une note de la *Trattato...; stampato in Venezia, anno 1556*. La date de 1556 est aussi celle que donne M. Marie dans son *Histoire des sciences mathématiques*, t. II ; p. 245

Quoi qu'il en soit, et jusqu'à meilleure information, ce serait donc à Stifel (1544) que reviendrait la priorité du triangle arithmétique de Pascal.

Extrait d'une lettre de M. Deschamps.

... Je trouve dans le dernier numéro de votre très intéressant journal, une démonstration de la réalité des racines de l'équation en S, déduite de la relation :

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = o.$$

Cette démonstration est attribuée M. Buckheim (1884).

Permettez-moi d'appeler votre attention sur une question de priorité qui me semble incontestable. La démonstration se trouve *sous forme identique*, mais avec des notations diffé-

(*) Le testament de Tartaglia, retrouvé à Venise et publié en 1881 par le prince Boncompagni, dans un ouvrage consacré à la mémoire de Cheldini, a prouvé que le véritable nom de Tartaglia était Fontana.

C'est dans le *Trattato* en question qu'il parle, sans la faire connaître complètement, de sa méthode pour résoudre les équations du troisième degré. On sait (voyez l'ouvrage de M. Marie, *loc. cit.*) que, selon toute vraisemblance, c'est à Tartaglia que Cardan a pris, par un procédé flétrissable, le secret de la formule que nous enseignons sous le nom de Cardan, mais qui, en bonne justice, devrait s'appeler formule de Tartaglia.

rentes, dans la Géométrie analytique de MM. Sonnet et Frontéra (4e édition, 1877; p. 599 et 600)...

Note. — En citant la source où avait été prise la démonstration en question, je n'avais nullement l'intention d'en attribuer la priorité à M. Buckheim. Je voulais seulement, par cette indication, présente à mon esprit, au moment où j'écrivais cette note, montrer que le calcul donné n'était pas nouveau. Cette manière de mettre en évidence la réalité des racines de l'équation en S est d'ailleurs très ancienne et la propriété, pour cette très petite chose, ne serait pas sans doute facile à établir, en admettant qu'elle en valut la peine.

G. L.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours du 8 juin 1887.

On donne dans un plan un point ω *fixe et deux axes fixes,* Ox, Oy.

Par ω *on fait passer deux droites rectangulaires rencontrant* Ox *en* B *et* D, Oy *en* A *et* C. *Par* A *et* B *on fait passer une parabole* P *tangente aux axes* Ox, Oy *en ces points. Par* C *et* D *on fait passer une parabole* P' *tangente aux axes* Ox, Oy *en ces points. On fait tourner les droites rectangulaires* AB, CD *autour de* ω.

1° Équation des paraboles P *et* P', *des axes et des directrices.*

2° Équation du lieu du point de concours des axes et des directrices.

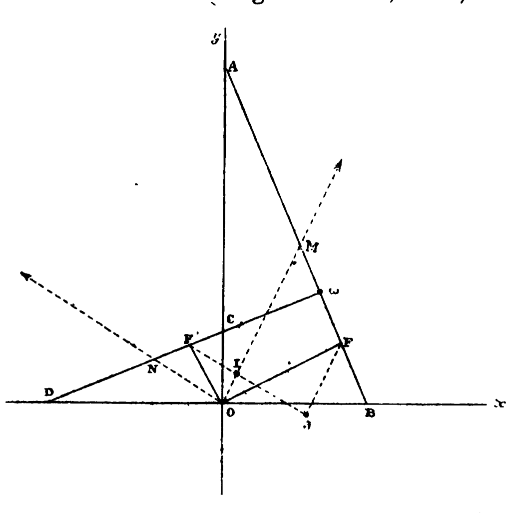
3° L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, lieu qui se compose de deux cercles.

4° On prouvera que la distance des foyers est constante.

SOLUTION

Sans entrer dans tous les détails de la solution que comporte cette question très facile, nous indiquerons rapidement la suivante.

Soient M et N les milieux des segments AB, CD ; les droites OM, ON qui sont visiblement rectangulaires représentent respectivement un diamètre de P et un diamètre de P′.



En projetant l'origine O en F sur AB et en F′ sur CD, on sait que ces points sont les foyers de P et de P′. Si nous menons, par F et par F′, des parallèles à OM et à ON, les droites FJ, F′J ainsi obtenues, représentent les axes de P et de P′ et le lieu du point J est donc le cercle décrit sur Oω comme diamètre.

On voit aussi que $O\omega = FF'$; la distance des deux foyers est donc constante.

La directrice de P′ passant par O, perpendiculairement à ON, on voit que OM représente justement cette directrice et, pour répondre à la deuxième partie, il faut donc trouver le lieu de I.

En posant

$$OI = \rho, \qquad IOx = \theta, \qquad O\omega = h, \qquad \omega Ox = \alpha\,;$$

on a

$$\rho = OF' \cos(\pi - 2\theta),$$
$$OF' = h \cos(\pi - \alpha - \theta).$$

L'équation du lieu est donc

$$\rho = h \cos(\alpha + \theta) \cos 2\theta,$$

ou, si l'on préfère les coordonnées cartésiennes,

$$(x^2 + y^2)^2 = h(x \cos \alpha - y \sin \alpha)(x^2 - y^2)$$

C'est une quartique isotropique unicursale, qu'on pourrait nommer, pour rappeler sa forme, *le trifolium oblique*. Lorsque

ω est situé sur l'un des axes Ox, Oy on a le trifolium droit; on trouve le folium double, en supposant ω situé sur la bissectrice. Toutes ces courbes se construisent, point par point, comme l'indique la figure, au moyen de la règle et de l'équerre.

Nota. — En considérant les droites isotropes doubles passant par ω, la remarque de de la Hire prouve que, à titre singulier, elles font partie du lieu. Aussi la solution analytique de la troisième partie, lorsque l'élimination est dirigée d'une certaine façon, conduit-elle à une équation du quatrième degré, se décomposant en deux facteurs. L'un représente le cercle décrit sur Oω comme diamètre; l'autre, un cercle évanouissant, de centre ω.

Si les résultats précédents sont exacts, et malgré l'explication, contestable peut-être, qu'on vient de lire, l'énoncé de la troisième partie ne nous paraît pas correct. G. L.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887

Mathématiques spéciales.

3 juin 1887. — I. On représente par

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\quad \ldots\quad (x_m, y_m)$$

les coordonnées des points d'intersection de deux courbes algébriques dont les équations mises sous forme entière sont

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0.$$

On suppose que ces points d'intersection sont *simples et situés à distance finie.*

1° Montrer que, pour chaque valeur de i, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - x_i)a_i(x, y) + (y - y_i)b_i(x, y), \\ F(x, y) &= (x - x_i)A_i(x, y) + (y - y_i)B_i(x, y), \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

les coefficients a_i, b_i, A_i, B_i étant des polynômes en x, y.

2° On pose

$$\varphi_i(x, y) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ A_i & B_i \end{vmatrix}$$

et

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=m} C_i \varphi_i(x, y),$$

et l'on demande de déterminer les constantes C_i de manière que le polynôme Φ prenne, pour $x = x$ et $y = y_i$, une valeur donnée u_i.

Montrer que le polynôme Φ ainsi obtenu comprend, comme cas particulier, la formule d'interpolation de Lagrange.

3° Démontrer que tous les polynômes en x et en y qui, pour $x = x$ et $y = y$ prennent la valeur u_i peuvent être mis sous la forme

$$\Phi + Mf + NF,$$

M et N étant des polynômes en x et en y.

II. — Soient

$$f = 0, \quad F = 0,$$

les équations de deux coniques u et U, et λ_1, λ_2, λ_3 les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction

$$f - \lambda F,$$

trouver la relation entre λ_1, λ_2, λ_3 exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse inscrire dans la conique u, un quadrilatère circonscrit à la conique U.

ÉCOLE NORMALE

16 juin 1887. — On considère la surface (dite *cylindroïde*) qui, rapportée à des axes rectangulaires, a pour équation :

$$z(x^2 + y^2) - m(x^2 - y^2) = 0.$$

Soit M un point de l'espace, dont les coordonnées sont x', y', z' ; on propose de mener de ce point des normales au cylindroïde :

1° Désignant par α, β, γ les coordonnées du pied de l'une quelconque des normales abaissées du point M sur le cylindroïde, on formera l'équation du quatrième degré (1) ayant pour racines les valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$, l'équation (2) ayant pour racines les valeurs de γ, et l'on montrera comment, des racines de l'une ou de l'autre de ces équations, on déduirait les coordonnées des pieds des normales cherchées ;

2° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (1) soit réciproque ? Trouver, en supposant le point M situé sur ce lieu, les coordonnées des pieds des normales ;

3° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (2) ait une racine double égale à z' ? En supposant le point M situé sur ce lieu, reconnaître si les racines de l'équation (2), différentes de z', sont réelles ou imaginaires.

4° Que représente l'équation (2) quand on y regarde l'inconnue comme une constante et x', y', z' comme les coordonnées d'un point variable.

QUESTION 21

Solution par M. Barthe.

Trouver le lieu des points de contact d'une série de surfaces homofocales du second degré avec des plans passant par une droite donnée ou par un point donné (O).

Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} - 1 = 0.$$

L'équation générale des surfaces homofocales est

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0. \quad (1)$$

Le plan polaire du point donné $(x_0\, y_0\, z_0)$ par rapport à la surface a pour équation

$$\frac{xx_0}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_0}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_0}{c^2 - \lambda} - 1 = 0. \quad (2)$$

Pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer λ entre les équations (1) et (2) ou, entre l'une d'elles et la suivante obtenue en retranchant les deux premières.

$$\frac{x(x - x_0)}{a^2 - \lambda} + \frac{y(y - y_0)}{b^2 - \lambda} + \frac{z(z - z_0)}{c^2 - \lambda} = 0. \quad (3)$$

Le lieu est, en général, une surface du sixième degré.

Supposons maintenant que le plan passe par un nouveau point $(x_1\, y_1\, z_1)$, il faut adjoindre au sytème précédent l'équation

$$\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_1}{c^2 - \lambda} - = 0. \quad (4)$$

ou

$$\frac{x(x - x_1)}{a^2 - \lambda} + \frac{y(y - y_1)}{b^2 - \lambda} + \frac{z(z - z_1)}{c^2 - \lambda} = 0. \quad (5)$$

Le lieu est dans ce cas une courbe.

Laissons de côté le cas général, et démontrons la proposition particulière suivante :

Si l'on considère une série d'ellipsoïdes homofocaux et que, par une droite AB *située dans l'un des plans principaux, on mène des plans tangents à tous ces ellipsoïdes, le lieu des points de contact est une circonférence.*

Supposons la droite située dans le plan des xy, soient $(x_1, 0, 0)$ $(y_1, 0, 0)$ les coordonnées du point de rencontre avec les axes; d'après ce qui a été vu, on doit éliminer λ entre les trois équations suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} \ 1 = - 0. \quad (1)$$

$$\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} - 1 = 0. \qquad (2)$$

$$\frac{yy_1}{b^2 - \lambda} - 1 = 0. \qquad (3)$$

En éliminant λ, on a

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z^2}{c^2 + a^2 + xx_1} - 1 = 0. \qquad (4)$$

et

$$a^2 - xx_1 = b^2 - yy_1. \qquad (5)$$

Il faut maintenant prouver que le plan (5) coupe la surface (4) suivant un cercle.

En effet, l'équation générale des surfaces du second degré passant par l'intersection de (4) et de (5) est

$$yy_1(c^2 - a^2 + xx_1) + yx_1(c^2 - a^2 + xx_1) + z^2xx_1 - xx_1(c^2 - a^2 + xx_1)$$
$$+ (a^2 - b^2 - xx_1 + yy_1)(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Exprimant que eette équation représente une sphère, on a

$$x_1y_1 - Ax_1 = By_1 = x_1y_1$$

et

$$x_1^2 + Ay_1 - Bx_1 = 0$$
$$cx_1 = 0$$
$$cy_1 = 0,$$

d'où $\quad C = 0 \quad B = x_1 \quad A = 0.$

Ce qui prouve que l'on peut faire passer une infinité de sphères, D étant variable, le lieu est donc bien une circonférence.

QUESTIONS PROPOSÉES

226. — On donne cinq points sur une droite. Celle-ci se déplace de manière que quatre de ces points décrivent les quatre faces d'un tétraèdre. Le cinquième point décrit une ellipse (Mannheim).

Lorsqu'un des quatre points se déplace sur la droite, cette ellipse varie. Prouver que le lieu de son centre est une autre ellipse et définir les éléments de cette dernière courbe.

(Amigues.)

227. — Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles la somme algébrique des carrés des demi-axes est égale à K. Interpréter géométriquement l'équation du lieu. Construire la courbe dans l'hypothèse $K<0$ et discuter ses diverses formes, dans l'autre hypothèse.

(Amigues.)

228. — Le lieu des foyers des paraboles, pour lesquelles un triangle donné ABC est autopolaire, est un cercle (cercle des neuf points).

Les directrices de ces paraboles passent par un point fixe (centre du cercle circonscrit). *(Poujade.)*

229. — On considère les paraboles tangentes à deux droites données OX, OY, en des points variables A et B.

Si les directrices passent par un point fixe P 1° le lieu des foyers est un cercle; 2° la droite AB passe par un point fixe Q. *(Poujade.)*

230. — Démontrer que l'on a :

$$1 + C_m^1 C_p^1 + C_m^2 C_p^2 + \ldots + C_m^m C_p^m = C_{p+m}^m,$$

m et p désignant deux entiers positifs tels que $p \geqq m$.

(Roux, élève au lycée de Grenoble.)

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13032-7.

SUR LA CUBIQUE

AUX PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT A UNE QUADRIQUE

Par **A. Aubry**, élève au Lycée Louis-le-Grand (classe de M. Niewenglowski).

1. — On sait que, dans le plan, l'hyperbole d'Apollonius est le lieu des points M tels que, si on les joint au point P, la droite MP est normale à la polaire du point M, relativement à la conique considérée Γ; de plus, la polaire réciproque de l'hyperbole par rapport à E est une parabole, qui est la même pour toutes les coniques homofocales à Γ.

Le but de cette note est de montrer que l'on peut étendre quelques-unes des propriétés de cette hyperbole à la cubique gauche que l'on rencontre, dans la géométrie à trois dimensions, quand on veut mener, d'un point donné, des normales à une surface du second degré (*).

2. — Considérons une quadrique E, à centre unique O, et un point P; cherchons le lieu C des points M dont les plans polaires sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point P. Le point P appartient à ce lieu, car, lorsque M vient se confondre avec P, MP prend une direction indéterminée, que l'on peut par suite regarder comme perpendiculaire au plan polaire du plan P; le plan polaire du point O étant le plan de l'infini, et ce plan ayant une direction indéterminée, on peut le considérer comme perpendiculaire à PO. Les points P et O font donc partie de C. Coupons dès lors la surface par un plan π qui contient la droite PO; la section φ est une conique qui a son centre en O. Soit M un point de C situé dans le plan π; le point M se trouve sur l'hyperbole d'Apollonius, relative au point P et à la conique φ, ou, ce qui revient au même, la polaire μ (trace du plan polaire du point M par rapport à E) du point M, relativement à φ, est tangente à une

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

certaine parabole ψ; le plan polaire du point M, qui est dans le plan diamétral π, est parallèle au diamètre $O\delta$, conjugué à ce plan; il est aussi parallèle à la perpendiculaire $O\varepsilon$ à π : la droite μ est donc parallèle à l'intersection des plans π et $\delta O \varepsilon$, Or, il n'existe qu'une tangente à la parabole ψ parallèle à une direction donnée; il y a donc, dans le plan π, un seul point du lieu, différent de P et O. C'est donc une cubique gauche, qui passe évidemment par les pieds des normales à la surface issues du point P. Soient OA, OB et OC les axes de E; le plan polaire du point x, situé à l'infini sur OA, est le plan BOC, qui est perpendiculaire à Px; le point x appartient donc à C, et, de même, les points à l'infini sur OB et OC. Ceci montre que Ox, Oy, Oz sont les directions asymptotiques de C. Supposons que le point M se rapproche indéfiniment du point P; la droite PM tend à devenir perpendiculaire au plan polaire du point P; la tangente à C, au point P, est donc perpendiculaire au plan polaire du point P. Si, au contraire, M se rapproche de O, PM tend vers PO; le plan polaire du point M tend à devenir perpendiculaire à OP et disparaît à l'infini; la tangente en O est donc le diamètre conjugué aux plans perpendiculaires à OP, attendu que OM est le diamètre conjugué des plans parallèles au plan polaire du point M. Remarquons enfin que la cubique C demeure la même, quand on considère les surfaces homothétiques et concentriques à E, puisque les plans polaires d'un même point par rapport à toutes ces surfaces sont parallèles.

En résumé, *le lieu des points* M *dont les plans polaires sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au point* P *est une cubique gauche* C *qui passe par les points* P *et* O, *par les pieds des normales issues du point* P *à la quadrique* E, *et par les points à l'infini sur les axes de cette quadrique.*

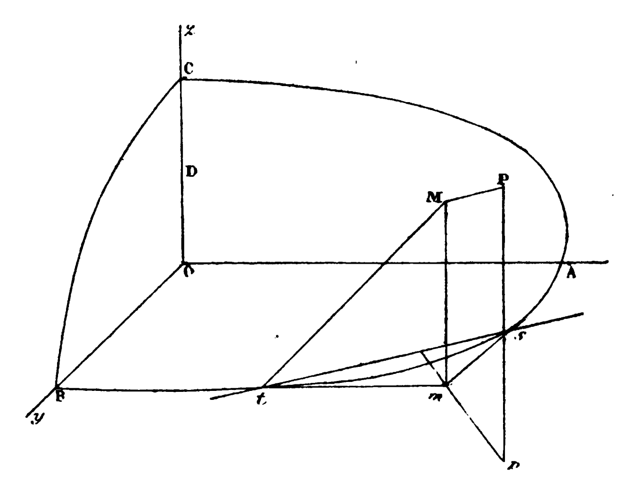
Cette cubique C *est aussi le lieu des pieds des normales issues du point* P *aux surfaces homothétiques et concentriques à* E. Car, soit E′ l'une de ces surfaces, M un point commun à E′ et à C; PM est normale au plan polaire du point M par rapport à E′, c'est-à-dire normale à E′.

3. — Avant de chercher les projections de la courbe C

sur les plans principaux de E, établissons la proposition suivante :

Soient M *un point quelconque,* m *sa projection sur un plan diamétral* Q *d'une quadrique donnée, projection faite parallèlement au diamètre* D *conjugué au plan* Q; *la polaire du point* m *par rapport à la section* φ *faite dans la quadrique par le plan* Q *est la trace sur ce plan du plan polaire du point* M.

Effectivement, désignons par s et t les points où le plan polaire du point M rencontre φ; Mt est une tangente à la surface et le plan tangent en t, qui passe par Mt, est parallèle au diamètre D; la droite Mt se projette donc parallèlement



à D, suivant la tangente mt à φ. De même, la tangente à φ en s passe par le point m, qui est, en conséquence, le pôle de ts par rapport à φ.

Cela étant, supposons que le plan Q soit un plan principal de la surface E et soit p la projection d'un point P sur ce plan. Si PM est perpendiculaire au plan polaire du point M, sa projection pm est perpendiculaire à la trace ts de ce plan sur le plan Q, c'est-à-dire perpendiculaire à la polaire du point m par rapport à φ. Ainsi, quand le point M décrit la cubique C, sa projection m décrit l'hyperbole d'Apollonius c, qui correspond au point p et à la conique φ.

Théorème. — *La cubique* C *se projette, sur un plan principal de la surface* E *selon l'hyperbole d'Apollonius relative à la section de* E *par ce plan et à la projection du point* P *sur ce même plan.*

(A suivre.)

NOTE SUR L'HYPOCYCLOIDE
A QUATRE REBROUSSEMENTS
(Suite et fin).

Par M. **J. Rat,** élève à l'École Polytechnique.

3. — Une tangente à l'hypocycloïde à quatre rebroussements la rencontre, indépendamment du point de contact, en quatre autres points. Cherchons les valeurs de t correspondant à ces points.

Soit t_0 la valeur de t relative au point de contact de la tangente. L'équation de cette tangente est :

$$Y + t_0 X - \frac{Rt_0}{\sqrt{1 + t_0^2}} = 0.$$

Soient $x = \frac{R}{(1 + t'^2)^{\frac{3}{2}}}$, $y = \frac{Rt'^3}{(1 + t'^2)^{\frac{3}{2}}}$,

les coordonnées d'un des points où la tangente rencontre l'hypocycloïde. Exprimons que la tangente considérée passe par ce point. Nous aurons ainsi, en faisant disparaître les radicaux, l'équation :

$$(1 + t_0^2)\left[\frac{R^2t'^6}{(1 + t'^2)^3} + \frac{R^2t_0^2}{(1 + t'^2)^3} + \frac{2R^2t'^3t_0}{(1 + t'^2)^3}\right] - R^2t_0^2 = 0$$

ou $t'^6 - 3t_0^2t'^4 + 2t_0(1 + t_0^2)t'^3 - 3t_0^2t'^2 + t_0^4 = 0,$

ou encore

$$(t' - t_0)^2[t'^4 + 2t_0t'^3 + 2t_0t' + t_0^2] = 0.$$

Si l'on supprime la solution double $t' = t_0$, qui correspond au point de contact de la tangente, on a l'équation cherchée :

$$t'^4 + 2t_0t'^3 + 2t_0t' + t_0^2 = 0. \qquad (2)$$

Cette équation a deux racines réelles, et deux seulement, pour toute valeur non nulle de t_0. Nous laissons au lecteur

le soin de démontrer cette propriété. Il en résulte qu'une tangente à la courbe ne la rencontre, indépendamment du point de contact, qu'en deux points réels.

Mais la propriété la plus remarquable de cette équation (2), c'est qu'on peut l'identifier avec l'équation (1) qui donne les valeurs de t correspondant aux tangentes menées à la courbe, par un point (x, y) du plan.

Supposons que le point (x, y) soit sur le cercle, qui passe par les points de rebroussement de la courbe. On a alors :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire :

$$t^4 + 2t^3\frac{y}{x} + 2t\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0,$$

ou, en posant

$$\frac{y}{x} = t_0,$$

$$t^4 + 2t_0t^3 + 2t_0t + t_0^2 = 0.$$

Cette relation exprime que les points de contact des tangentes issues du point (x, y) sont sur l'une des deux tangentes à la courbe, dont le coefficient angulaire est $-t_0 = -\frac{y}{x}$.

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Les tangentes aux points où une tangente à l'hypocycloïde à quatre rebroussements la rencontre, indépendamment du point de contact* M, *concourent en* N *sur le cercle* C *qui passe par les points de rebroussement de la courbe. La tangente en* M *à l'hypocycloïde et la normale en* N *au cercle* C *sont également inclinées sur les tangentes de rebroussement.*

Par tout point du cercle

$$X^2 + Y^2 - R^2 = 0,$$

on voit facilement qu'on ne peut mener à la courbe que deux tangentes réelles. On peut donc aussi énoncer le théorème précédent de la façon suivante :

Par tout point du cercle qui passe par les points de rebroussement de l'hypocycloïde, on peut mener à cette courbe deux tangentes réelles. L'enveloppe de la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes est l'hypocycloïde elle-même.

D'ailleurs, il est facile de démontrer que la projection de l'hypocycloïde sur un plan passant par l'une des tangentes de rebroussement est la développée d'une ellipse. On peut donc étendre à la développée de l'ellipse le théorème du § 3, et l'on peut dire :

Les tangentes aux points où une tangente à la developpée d'une ellipse rencontre cette développée, indépendamment du point de contact M, *concourent en* N *sur l'ellipse* E *qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée.*

4. Théorème. — *Si, autour du centre de la courbe, on fait pivoter un angle droit* AOB, *dont les côtés rencontrent la courbe en* A *et en* B, *les tangentes en ces points sont rectangulaires.*

En effet, soient les coordonnées du point A :

$$x_1 = \frac{R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y_1 = \frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Celles du point B où la tangente est perpendiculaire à AO sont :

$$x_2 = \frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y_2 = \frac{-R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

et l'on a :

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

5. — L'équation d'une normale à la courbe au point caractérisé par le paramètre t est :

$$Y - \frac{1}{t}X + k = 0.$$

Si l'on exprime qu'elle passe au point :

$$x = \frac{R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y = \frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

nous aurons :

$$\frac{Rt^3}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{t} \cdot \frac{R}{(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}} + k = 0,$$

d'où

$$k = -\frac{R(t^2 - 1)}{t\sqrt{1 + t^2}}.$$

L'équation de la normale au point (x, y) est donc :

$$Y - \frac{1}{t}X - \frac{R(t^2 - 1)}{t\sqrt{1 + t^2}} = 0,$$

ou, en posant
$$\frac{1}{t} = \theta,$$

$$Y - \theta X + \frac{R(\theta^2 - 1)}{\sqrt{1 + \theta^2}} = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des normales menées d'un point (x, y) à la courbe est donc :

$$(y - \theta x)^2(1 + \theta^2) - R^2(\theta^2 - 1)^2 = 0,$$

ou $(x^2 - R^2)\theta^4 - 2\theta^3 xy + \theta^2(x^2 + y^2 + 2R^2) - 2\theta xy + y^2 - R^2 = 0.$

La forme de cette équation met en évidence le théorème suivant :

Théorème. — *Les quatre normales que l'on peut mener d'un point à l hypocycloïde font avec l'une quelconque des tangentes de rebroussement des angles dont la somme est un multiple de* π.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 148).

---

24. Point associé à l'infini (M, M_∞). — A un point M (α, β, γ) associons un second point dont les coordonnées soient :

$$\beta - \gamma \quad \gamma - \alpha \quad \alpha - \beta.$$

Ce point, qui est situé à l'infini puisque la somme de ses coordonnées est nulle, est appelée *point de l'infini associé à* M, ou, plus brièvement, on dit qu'il est l'*associé à l'infini* : nous noterons un tel point par la lettre M_∞ (*).

(*) Consulter à ce sujet : G. de Longchamps. *J. E.*, 1886, pp. 132, 154-158, 232.

Le point M_∞ est le point harmoniquement associé à la *transversale réciproque* (*) de la droite qui joint le point M au centre de gravité G du triangle. *Réciproquement :* Étant donné un point M_∞ à l'infini, si l'on prend la droite μ harmoniquement associée à ce point, puis la transversale réciproque μ_0 : tout point pris sur μ admet le point M_∞ pour associé à l'infini. Le point M_∞, associé à l'infini au point M, se construira donc de la manière suivante :

On joint MG, cette droite coupe BC en D″, on prend le point D′ isotomique de D″ et le point D conjugué harmonique de D′. La droite AD et les deux droites analogues, obtenues par une construction semblable, elles sont parallèles; concourent à l'infini au point M_∞.

La construction de l'associé à l'infini peut encore se faire simplement par la considération des points isobariques :

En effet, au point M (A, B, C) (voir § 23), correspondent deux points isobariques M_i^1 (B, C, A) et M_i^2 (C, A, B). La droite $M_i^1 M_i^2$ qui a pour équation :

$$\Sigma\alpha(BC - A^2) = 0$$

passe par le point M_∞, en vertu de l'identité évidente

$$\Sigma(B - C)(BC - A^2) \equiv 0.$$

25. Associations irrationnelles. — Cette transformation est celle dans laquelle on associe, à des nombres donnés, d'autres nombres liés à ceux-ci par des formules renfermant des symboles irrationnels. Considérons les éléments A′, B′, C′ associés aux quantités A, B, C au moyen des formules

$$\frac{A'}{\pm\sqrt{A}} = \frac{B'}{\pm\sqrt{B}} = \frac{C'}{\pm\sqrt{C}}$$

Cette association signalée par M. de Longchamps (**) n'est pas *uniforme* comme celles que nous avons étudiées précédemment; elle est *complexe,* si par là nous voulons exprimer qu'à un point donné correspondent plusieurs points.

(*) Cette droite est étudiée au § 31.

(**) Voir sur les *associations irrationnelles* et le *demi-potentiel*, G. de Longchamps. — *J. E.* 1886, pp. 273-276.

Étant donné un point M (A, B, C) dans l'intérieur du triangle de référence, voici comment on peut déterminer les points (A', B', C'). Soit μ la droite harmoniquement associée au point M; elle coupe les côtés du triangle en P, Q, R. Le point P étant sur BC, on prend le point P' tel que

$$\overline{PP'}^2 = PB.PC.$$

Soient Q', R' les points analogues à P'. Les trois droites AP', BQ', CR' concourent en un même point M' dont les coordonnées sont :

$$\sqrt{A}, \quad \sqrt{B}, \quad \sqrt{C}$$

Les radicaux étant pris avec le signe +; les trois autres points qui correspondent à M sont les points algébriquement associés à M'.

26. Le demi-potentiel. — Le demi-potentiel est le point remarquable P qui, dans le triangle ABC, a pour coordonnées

$$\sqrt{a}, \quad \sqrt{b}, \quad \sqrt{c}$$

ce point se construit de la manière suivante :

Par les pieds L, M, N des bissectrices extérieures, on mène les tangentes L*l*, M*m*, N*n* au cercle circonscrit, et l'on rabat L*l* sur LBC en LL'; les droites AL', BM', CN' concourent au point P.

(A suivre.)

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

DONNÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1887)

Solution géométrique par M. MALLOIZEL, professeur à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

D'un quart de tore supposé plein on enlève la portion comprise à l'intérieur d'un cône donné: représenter par ses projections le solide obtenu. L'axe du tore est vertical; le plan de front et le plan de profil de cet axe limitent le quart de tore, lequel est situé en avant du premier plan et à droite du second. Le cône a

son sommet sur l'axe du tore. Pour déterminer sa directrice, on imagine la sphère dont un grand cercle coïncide avec le cercle de front qui limite le quart de tore. Prenons, par rapport à cette sphère, le plan polaire du sommet du cône, enfin menons à égale distance de ce plan et du sommet du cône, un second plan parallèle au premier. Ce second plan coupera le quart de tore suivant la directrice qu'il s'agissait d'indiquer. Le rayon du cercle générateur du tore sera de 8^{cm}*. La distance du centre de ce cercle à l'axe sera de* 17^{cm}*. La hauteur du sommet du cône au-dessus du centre du tore sera de* 4^{cm}*. La projection horizontale du centre du tore sera à* 4^{cm} *au-dessous et la projection verticale à* 13^{cm} *au-dessus du centre du cadre, sur la parallèle au grand côté situé à* 12^{cm} *à gauche de ce point.*

On obtient simultanément les points appartenant à la directrice du cône et la seconde courbe d'intersection du cône et du tore par la construction suivante :

Tout plan mené par l'axe coupe le plan P suivant une droite qui passe par le point fixe $\omega\omega'$, trace de l'axe sur le plan et qui ramenée, dans le plan de front de cet axe devient $\omega' e'_1 d'_1$. $S'c'_1$, $S'd'_1$ sont les génératrices correspondantes du cône et par suite m'_1, n'_1 les points de la courbe cherchée après la rotation. Je dis que $m'_1 n'_1$ est parallèle à $S'\omega'$. En effet, $m'_1 n'_1$ et $e'_1 d'_1$ se coupent en e'_1 sur la polaire $a'b'$ de S' par rapport au cercle générateur du tore, donc $e'_1 c'_1 d'_1 - e'_1 b' a' - e'_1 m'_1 n'_1 - e'_1 S'$ forment un faisceau harmonique. D'autre part, et d'après les données, ω' est le milieu de $S'K'$ et par suite le rayon $e'_1 m'_1 n'_1$ du faisceau précédent est parallèle à $S'\omega'$. D'ailleurs, la longueur $e'_1 e'$ est une constante; les points $m'_1 n'_1$ se ramènent donc en $m'_1 n'_1$ sur la ligne de rappel de e' et la projection verticale est le cercle générateur du tore transporté parallèlement à xy de $e'e'_1$. De là résulte que les points de la courbe sont deux à deux sur une même verticale et que, par suite, en projection horizontale tous les points sont doubles. Cette projection est une parabole :

Menons $\nu\nu'$ parallèle à $S'\omega'$ à gauche de cette droite et à une distance égale à la longueur constante $e'e'_1$. On voit de suite

que (m, n) étant la projection horizontale commune des deux points on a :

$$mo = om_1 = g'm'_1 = m'\nu' = m\nu.$$

La parabole a donc o pour foyer et $\nu\nu'$ pour directrice.



On a en $(d_1\, d')$ les projections d'un point quelconque de la directrice du cône.

Remarque. — La démonstration est indépendante de la cote du sommet; elle ne tient compte que de cette condition que le plan P est équidistant du plan polaire et du sommet du cône.

QUESTIONS D'EXAMEN

13. — *Discuter la courbe* U *qui correspond aux équations*

$$x = at^2 + bt + c,$$
$$y = a't^2 + b't + c',$$
$$z = a''t^2 + b''t + c'';$$

dans lesquelles t *désigne un paramètre variable*

1° En cherchant le nombre de points communs à U et à un plan, on voit que l'on est conduit à une équation du second degré en t; donc U *est une conique.*

2° Pour avoir le genre de la conique, on peut chercher la nature de ses directions asymptotiques. Or, un point M de U ne peut être situé à l'infini que si t est égal à $\pm\infty$. Dans cette hypothèse, on trouve que le point est rejeté à l'infini, dans une direction unique (α, β, γ),

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{a'} = \frac{\gamma}{a''}.$$

Ainsi U *est une parabole,* et la direction des diamètres est celle de la droite Δ :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a'} = \frac{z}{a''}.$$

On arrive aussi à ce résultat, en considérant les projections de U sur les plans de coordonnées.

3° Si l'on veut déterminer le sommet de la parabole, on observera qu'en ce point, la tangente est perpendiculaire à Δ. Or, pour les courbes unicursales, les équations de la tan-



gente au point x, y, z sont

$$\frac{X - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z - z}{\frac{dz}{dt}},$$

ou, dans le cas présent,

$$\frac{X - x}{at + b} = \frac{Y - y}{a't + b'} = \frac{Z - z}{a''t + b''}.$$

On a donc, pour déterminer le paramètre t qui correspond au sommet de U, l'égalité

$$t(a^2 + a'^2 + a''^2) + ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad \text{etc.}$$

14. — ***Combien y a-t-il de paraboloïdes passant par la courbe commune à deux quadriques? De quelle nature sont-ils?***

Soient

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

les équations des deux quadriques données; posons

$$U \equiv \varphi(x, y, z) + \ldots \qquad V \equiv \psi(x, y, z) + \ldots;$$

φ, ψ désignant des formes homogènes du second degré.

Alors, $U + \lambda V = 0$ représente l'équation générale des quadriques Q, passant par les points communs à U et à V.

D'après cela, Q sera un paraboloïde si l'on prend pour λ une des racines de l'équation $R(\lambda) = 0$ obtenue en égalant à zéro le discriminant Δ de la forme quadratique

$$\varphi(x, y, z) + \lambda\psi(x, y, z). \qquad (1)$$

Ce discriminant Δ est une fonction du troisième degré en λ que l'on a rencontrée quand on a traité, dans la géométrie à deux dimensions, l'intersection des deux coniques $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (*).

En nous reportant à cette discussion, nous voyons que trois cas sont à distinguer; à chacun d'eux correspond, pour la forme (1), une décomposition en une somme ou une différence de deux carrés et, par suite, un paraboloïde elliptique ou hyperbolique.

Ces trois cas sont

(*) On voit ici, et dans beaucoup d'autres questions, l'avantage d'adopter, pour la forme quadratique ternaire une même notation, dans la géométrie plane et dans la géométrie à trois dimensions.

1° Trois paraboloïdes hyperboliques;

2° Deux paraboloïdes elliptiques imaginaires et un paraboloïde hyperbolique;

3° Deux paraboloïdes elliptiques réels et un paraboloïde hyperbolique.

En résumé; il y a toujours *un* ou *trois* paraboloïdes hyperboliques passant par la courbe commune à deux quadriques.

15. — *Y a-t-il des solutions réelles à l'équation*

$$x - \log x = 0, \qquad (a > 1), \tag{1}$$

a *désignant la base du système de logarithmes?*

En appliquant le théorème de Rolle à l'équation (1) on trouve qu'il y a deux racines réelles lorsque la condition

$$\log e - \log \log e \leqslant 0, \tag{2}$$

est vérifiée; les racines sont imaginaires, dans l'autre hypothèse.

L'inégalité (2) peut s'écrire

$$\log\left(\frac{e}{\log e}\right) \leqslant 0,$$

ou, puisqu'on suppose $a > 1$,

$$\frac{e}{\log e} \leqslant 1.$$

Mais on sait que

$$\log_a e . \log_e a = 1 ;$$

on a donc

$$e \log_e a \leqslant 1,$$

ou enfin

$$a \leqslant e^{\frac{1}{e}}.$$

C'est la condition cherchée; elle est compatible avec l'hypothèse que nous avons faite ($a > 1$). Pour conclure, nous voyons donc que dans les systèmes de logarithmes dont la base est choisie entre l'unité et le nombre transcendant $e^{\frac{1}{e}}$, il y aura, dans la table correspondante, deux nombres ayant la même valeur que leurs logarithmes.

16. — *Quel est le nombre de conditions auxquelles on assujettit une courbe* U, *quand on donne un point multiple* A, *d'ordre* j.

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes en ce

point, tous les termes de l'équation, jusques et y compris ceux de l'ordre $j - 1$ doivent disparaître. Or les termes du degré $(j - 1)$ sont représentés symboliquement par

$$\frac{1}{(j-1)!}(xf + yf + zf)^{(j-1)}.$$

Le nombre de ces termes, par une formule connue (*C. M. S*; Alg., p. 34), est

$$\frac{j(j+1)}{2}.$$

D'ailleurs, si toutes les dérivées d'ordre $(j - 1)$ sont nulles, toutes celles d'un ordre inférieur sont nulles; ainsi la connaissance d'un point multiple d'ordre j, quand ce point est donné, équivaut à $\frac{j(j+1)}{2}$ conditions simples.

17. — *Appliquer le théorème de Sturm à l'équation*

$$V = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

On sait (*C. M. S.*, t. I, § 479) comment, par une application très simple du théorème de Rolle, on démontre qu'une pareille équation n'a qu'une racine réelle. On peut aussi établir ce fait, au moyen du théorème de Sturm, de la manière suivante:

On a d'abord

$$V_1 = \frac{dV}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^{2p}}{2p!}.$$

Divisons V par V_1; les polynômes V et V_1 étant ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x; nous avons

$$V = V_1 \times 1 + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

En posant:

$$V_2 = -\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

on a

$$V = V_1 - V_2$$

et l'on peut appliquer le théorème de Sturm aux trois fonctions

$$V, \quad V_1, \quad V_2.$$

En désignant par ε une quantité positive, infiniment petite,

on forme alors le tableau suivant :

$-\infty$	$-$	$+$	$+$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$+$
$+\varepsilon$	$+$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$

D'où l'on conclut que l'équation $V = 0$, admet une seule racine réelle, comprise entre zéro et $-\infty$.

QUESTION 122

Solution par M. RAT (*), élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Piéron).

On considère une ellipse Γ *rapportée à ses axes. Désignons par* P *et* Q *les extrémités du grand axe, et imaginons sur* Γ *un point mobile* M. *Les droites* PM *et* QM *rencontrent le cercle* Δ, *décrit sur* PQ *comme diamètre, en des points* A *et* B.

1° *Trouver le lieu décrit par le pôle* C *de la droite* AB *par rapport à* A. *Ce lieu est l'ellipse qui correspond à l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

2° *Démontrer qu'en désignant par* φ *l'angle d'anomalie du point* M, *l'équation du cercle* AMB *est*

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi - \frac{a^2+b^2}{b}y\sin\varphi + a^2 = 0.$$

3° *Lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles* AMB. *Ce lieu est le cercle* Δ *lui-même.*

4° *Enveloppe des cercles* AMB. *On trouve deux cercles, correspondant aux équations*

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - \frac{c^2y}{b} - a^2 = 0.$$

5° *Lieu des centres de similitude du cercle principal* Δ *et du cercle mobile* AMB.

(G. L.)

(*) Aujourd'hui, élève à l'école Polytechnique.

1° Soient a cos φ et b sin φ les coordonnées d'un point M de l'ellipse. Les équations des droites PM et QM sont respectivement

$$a(y - b \sin \varphi)(1 - \cos \varphi) + b \sin \varphi(x - a \cos \varphi) = 0,$$

et $a(y - b \sin \varphi)(1 + \cos \varphi) - b \sin \varphi(x - a \cos \varphi) = 0,$

et l'équation quadratique du système de ces droites se met, après réductions, sous la forme :

$$a^2 \sin^2 \varphi(y - b \sin \varphi)^2 + 2ab \sin \varphi \cos \varphi (x - a \cos \varphi)(y - b \sin \varphi) - b^2 \sin^2 \varphi(x - a \cos \varphi)^2 = 0,$$

égalité qu'on peut écrire

$$(a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2) \sin \varphi + 2abxy \cos \varphi - 2a^2by = 0. \quad (1)$$

L'équation du cercle principal Δ est d'ailleurs

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0. \quad (2)$$

Si nous multiplions l'équation (2) par b^2 et si nous ajoutons ce résultat à l'équation (1) nous avons :

$$y[(a^2 + b^2)y \sin \varphi + 2abx \cos \varphi - 2a^2b] = 0,$$

qui représente deux droites, passant par les points communs aux cercles Δ et aux droites PM et QM. L'une des droites obtenues est la droite PQ; donc l'autre est la droite AB, dont l'équation est :

$$2ax \cos \varphi + \frac{(a^2 + b^2)}{b} y \sin \varphi - 2a^2 = 0. \quad (3)$$

Soient α et β les coordonnées du pôle de la droite AB

$$\alpha x + \beta y - a^2 = 0. \quad (4)$$

Si l'on identifie (3) et (4), on a les relations :

$$\frac{\sin \varphi}{\dfrac{\beta}{a^2 + b^2}} = \frac{2b \cos \varphi}{\dfrac{\alpha}{a}} = 2b.$$

On tire de là sin φ et cos φ, et, en utilisant la relation

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

on a l'équation du lieu du pôle de la droite AB, qui est (en remplaçant α et β par x et y) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{a^2 + b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

2° L'équation générale des cercles passant par les points d'intersection A et B de la droite AB avec le cercle Δ est :

$$\lambda(x^2 + y^2 - a^2) + 2ax \cos \varphi + \frac{a^2 + b^2}{b} y \sin \varphi - 2a^2 = 0.$$

Si on détermine λ de façon que le cercle représenté par l'équation précédente passe en M, on trouve $\lambda = -1$.

L'équation du cercle circonscrit au triangle AMB est donc :

$$x^2 + y^2 - 2ax \cos \varphi - \frac{a^2 + b^2}{b} \sin \varphi + a^2 = 0. \quad (4)$$

3° Pour avoir l'équation du lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine aux cercles AMB, il faut éliminer le paramètre variable φ entre l'équation du cercle AMB et l'équation de la polaire de l'origine par rapport au cercle AMB :

$$2ax \cos \varphi + \frac{a^2 + b^2}{b} y \sin \varphi - 2a^2 = 0;$$

ce qui donne, en ajoutant ces équations membre à membre

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

ce lieu est donc le cercle Δ lui-même.

4° Pour avoir l'enveloppe des cercles AMB, il faut éliminer le paramètre variable φ entre l'équation (4) et la dérivée du premier membre de cette équation (4), prise par rapport à φ,

$$2ax \sin \varphi - \frac{a^2 + b^2}{b} y \cos \varphi = 0. \quad (5)$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$\sin \varphi = \frac{\frac{a^2 + b^2}{b} y}{x^2 + y^2 + a^2},$$

et

$$\cos \varphi = \frac{2ax}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

Portant ces valeurs de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ dans la relation $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, on a l'équation du lieu :

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{b}\right)^2 y^2 - 4a^2x^2 = 0,$$

qui peut s'écrire :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 y^2 = 0.$$

en posant

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

ou encore

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 - \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 y^2 = 0.$$

On voit donc qu'on a, comme lieu, les deux cercles représentés par les équations :

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{b} y - a^2 = 0,$$

et

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{b} y - a^2 = 0.$$

Ces deux cercles sont symétriquement placés par rapport à l'axe des x et ils passent par les points P et Q.

5° Pour trouver le lieu des centres de similitude du cercle Δ et du cercle mobile AMB, nous chercherons le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles avec la ligne des centres.

L'équation du cercle Δ peut s'écrire

$$(x - a \cos \varphi)^2 + \left(y - \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi\right)^2 - \left(\frac{c^2}{2b}\right)^2 \sin^2 \varphi = 0.$$

L'équation d'une tangente commune aux cercles Δ et AMB est donc

$$(x - a\cos\varphi)\cos\omega + \left(y - \frac{a^2 + b^2}{2b}\sin\varphi\right)\sin\omega - \frac{c^2}{2b}\sin\varphi = 0, \quad (6)$$

avec la relation :

$$a \cos \varphi \cos \omega + \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi \sin \omega + \frac{c^2}{2b} \sin\varphi = \pm a, \quad (7)$$

qui exprime que la droite (6) est à une distance du centre du cercle Δ, égale au rayon de ce cercle.

D'autre part, l'équation de la ligne des centres des deux cercles considérés est :

$$\frac{x}{a \cos \varphi} = \frac{y}{\frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi}. \quad (8)$$

On aura donc le lieu des centres de similitude des cercles AMB et Δ, en éliminant les paramètres variables φ et ω entre les équations (6), (7) et (8).

Or, de l'équation (8) on tire :

$$\frac{x}{a \cos \varphi} = \frac{y}{\frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi} = \frac{x \cos \omega + y \sin \omega}{a \cos \varphi \cos \omega + \frac{a^2 + b^2}{2b} \sin \varphi \sin \omega},$$

d'où l'on tire en tenant compte des équations (6) et (7) :

$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{\dfrac{a^2+b^2}{2b}\sin\varphi} = \frac{\pm a}{\pm a - \dfrac{c^2}{2b}\sin\varphi}.$$

Si on tire $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ de ces deux dernières équations et qu'on porte ces valeurs dans la relation $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on a l'équation du lieu des centres de similitude des deux cercles Δ et AMB. On trouve ainsi :

$$4a^2b^2y^2 + (a^2+b^2)^2x^2 - [c^2y \pm a(a^2+b^2)]^2 = 0.$$

ou

$$(a^2+b^2)^2x^2 + (4a^2b^2 - c^4)y^2 - 2ac^2(a^2+b^2)y - a^2(a^2+b^2)^2 = 0,$$

et

$$(a^2+b^2)^2x^2 + (4a^2b^2 - c^4)y^2 + 2ac^2(a^2+b^2)y - a^2(a^2+b^2)^2 = 0.$$

On a donc pour le lieu cherché un système de deux coniques, symétriques par rapport à l'axe des y, et symétriquement placées par rapport à l'axe des x. Ces deux coniques passent aux points P et Q.

Ces deux coniques seront des ellipses, si l'on a :

$$4a^2b^2 - c^4 > 0,$$

ou $$(2ab + c^2)(2ab - c^2) > 0,$$

ou $$2ab - (a^2 - b^2) > 0,$$

ou $$[b + a(\sqrt{2}+1)][b - a(\sqrt{2}-1)] > 0,$$

ou enfin $$b > a(\sqrt{2}-1).$$

Si $b < a(\sqrt{2}-1)$, les coniques précédentes sont des hyperboles.

Si, en particulier, $b = a(\sqrt{2}-1)$, ces deux coniques sont des paraboles.

Nota. — Solutions analogues par MM. Aug. Blanc, élève au lycée de Marseille; Amouroux, lycée de Grenoble; Giat, lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Vacquant, ancien élève de mathématiques spéciales au lycée de Lille; Hugon, à Poligny; Valabrègue, au lycée de Montpellier; Taratte, élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis; Marzarit, au lycée d'Angoulême; E. Simonot, élève de mathématiques spéciales à la faculté libre de Lyon; Sequestre, au lycée d'Angoulême; F. Michel, élève de mathématiques spéciales au lycée de Montpellier; Charles Martin, lycée Condorcet; Grolleau, maître auxiliaire au lycée de Marseille.

VARIÉTÉS

SUR LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Par M. **G. Milhaud,** professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée du Havre.

(*Suite et fin*, voir p. 141.)

Arrivons maintenant à la deuxième interprétation du problème; elle porte au fond sur l'impossibilité pour l'esprit de reconstituer un élément quelconque déterminé à l'aide de la série illimitée de parties en lesquelles la pensée peut logiquement le subdiviser. Ainsi reprenons l'exemple de la progression géométrique. L'extrémité A_n de la longueur variable décrit successivement, à partir de sa position initiale A_1, les chemins $\frac{1}{10}, \frac{1}{100} \dots$, et par conséquent a, pour position limite, un certain point L situé à une distance $\frac{10}{9}$ du point O, Que l'on compose, par la pensée, le total $1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^n}$, quel que soit le terme où l'on s'arrête, la somme est moindre que OL, et si on essaie de parvenir ainsi à la formation de OL, on se heurte à un obstacle insurmontable, parce que le procédé logique qu'emploie l'esprit est inépuisable. Le mobile auquel on aurait donné par exemple un mouvement uniforme arrivera jusqu'en L; l'esprit ne peut l'y suivre, s'il s'assujettit à décomposer le chemin en parties dont le nombre est illimité. Il y a là une question des plus intéressantes pour les philosophes, mais elle n'a aucun rapport avec le fait mathématique que le mobile A_n de notre exemple a pour position limite le point L.

Tout le monde connaît le fameux problème d'Achille et de la tortue. Achille va dix fois plus vite que la tortue, la dis-

tance qui les sépare à l'instant du départ est, pour fixer les idées, de 10 mètres. Quand Achille aura parcouru ces 10 mètres, disait Zénon, la tortue aura parcouru 1 mètre, la distance qui les sépare sera devenue 1 mètre; quand Achille l'aura parcourue, la tortue se sera avancée de $\frac{1}{10}$, et ainsi de suite; la distance deviendra après chaque instant le dixième de ce qu'elle était a l'instant précédent, *elle ne sera donc jamais nulle*.

Les idées se suivent logiquement jusqu'à la conclusion exclusivement. Que fait en effet l'esprit qui ajoute les petits chemins $1, \frac{1}{10} \dots$ Nous l'avons vu, il construit une longueur qui reste inférieure à $\frac{10}{9}$ de mètre. Il n'explore que la portion de droite en deçà du point L situé à cette distance du point de départ de la tortue. En supposant que le mouvement soit uniforme et de vitesse 1, on voit également que l'esprit en ajoutant 1 sec, $\frac{1}{10}$ de s, $\frac{1}{100}$ de s... forme une durée qui reste inférieure à $\frac{10}{9}$ de s. Il n'a cherché l'instant de la rencontre que dans un intervalle de temps limité à $\frac{10}{9}$ de seconde En procédant ainsi, il n'arrive pas à engendrer toute la portion de droite se terminant en L, ou toute la durée se terminant à cet instant. Mais la conclusion logique doit être alors : qu'en deçà d'un certain point sur la droite, et d'un certain instant dans le temps, la rencontre n'aura pas lieu. Le mot *jamais* qui intervient dans la conclusion du sophisme, et auquel on voudrait faire signifier « si loin qu'on se place dans le temps — dans l'avenir » empêche la conclusion d'être logique. Que si le mot jamais n'implique pas l'idée du temps illimité qui va s'écouler à partir de l'instant présent, s'il est dépouillé de ce sens objectif, pour désigner une impossibilité logique pour l'esprit d'apercevoir le point ou l'instant de la rencontre, quand il se place pour le chercher dans une position particulière, à laquelle est due cette impossibilité, il est bien évident

que tout sophisme a disparu, le raisonnement est absolument rigoureux et la conclusion ne fait que signaler une difficulté que nous reconnaissons tous.

Il est inutile d'insister davantage sur cette difficulté métaphysique. Mais il faut bien constater en quel point de nos recherches nous l'avons rencontrée. Nous sommes bien loin de la notion mathématique de limite, dont la définition si simple et si claire peut sans soulever plus de difficultés être placée à côté des définitions de géométrie ou d'algèbre élémentaire. Nous avons étudié, en dehors de la compréhension de cette idée de limite, une question qui n'intervient jamais dans les raisonnements mathématiques : la variable peut-elle atteindre sa limite? — Et c'est enfin en nous plaçant à un point de vue tout spécial dans ce dernier problème, que nous avons rencontré une vraie difficulté métaphysique : elle existe, elle est intéressante, mais nos raisonnements fondés sur la notion de limite en sont absolument indépendants.

IV

La notion de continuité est également fondamentale en analyse. Mais ici encore il sera aisé de séparer l'élément nouveau purement analytique de celui dont la nature échappe à tout examen. Ce dernier est le concept du continu, dont on peut discuter et étudier indéfiniment la signification ou l'origine : on n'arrivera certainement pas à le comprendre, c'est-à-dire à le ramener à des concepts plus simples. C'est une de ces notions premières comparables aux idées d'espace et de temps, et d'ailleurs impliquées par celles-ci, qui ne répond peut-être à aucune réalité objective et pourrait bien n'être qu'une loi formelle de notre esprit. Quoi qu'il en soit, la géométrie suppose cette notion dès le début. Que deviendrait sans elle l'idée de la ligne la plus simple? L'arithmétique la trouve dans ses fondements même, lorsqu'elle crée des symboles pour représenter tous les états des grandeurs. Plus généralement, elle intervient en analyse dans ce principe si fréquemment appliqué, — toute quantité seulement

croissante ou seulement décroissante a une limite si elle ne croît pas ou ne décroît pas indéfiniment. C'est là un postulat impliqué dans notre notion du continu (*). M. Tannery, dans son introduction à la théorie des fonctions d'une variable, a montré qu'en se plaçant à un point de vue purement abstrait, en laissant de côté la considération des quantités concrètes, on peut se passer de ce principe. Mais, en tous cas, que le postulat soit laissé dans l'analyse pure, au lieu d'être reculé jusqu'aux applications, il est loin d'être introduit par le haut calcul, puisqu'il est déjà indispensable à la définition d'un nombre tel que $\sqrt[3]{2}$ par exemple. L'élément nouveau qui intervient dans l'analyse supérieure, c'est la continuité d'une fonction, une continuité relative, si l'on veut, dont la définition, donnée dans tous les cours d'algèbre, se ramène immédiatement à celle de la limite, et se trouve être aussi rigoureuse que n'importe quelle définition élémentaire.

Ainsi, le calcul infinitésimal, de quelque façon qu'il ait été d'abord compris par ses inventeurs eux-mêmes, et toute théorie construite logiquement sur la notion de limite, n'est qu'un développement naturel et logique des principes posés dès les premiers pas des sciences mathématiques, sans intervention d'aucune difficulté nouvelle.

C'est la conclusion que nous avions en vue.

(*) Voir sur ce sujet notre préface de la traduction de la *Théorie générale des Fonctions*, de Paul du Bois-Reymond, chez Hermann, rue de la Sorbonne, Paris.

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15122-7.

SUR LA CUBIQUE
AUX PIEDS DES NORMALES ISSUES D'UN POINT A UNE QUADRIQUE

Par M. **A. Aubry**, élève au Lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Niewenglowski).

(*Suite*, voir p. 169.)

4. — Tout cône ayant son sommet sur la cubique C et passant par cette cubique est, comme l'on sait, du second ordre; puisque ce cône passe en particulier par les points à l'infini sur C, on voit qu'il contient les parallèles aux axes de E menées par son sommet, et que, par suite, il est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits. Considérons celui de ces cônes qui a son sommet au point P; soit T ce cône. Soient E_0 l'une des surfaces homofocales à E passant par le point P, PI la normale en P à cette surface et π le plan tangent. Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport à une famille de quadriques homofocales étant une droite perpendiculaire à ce plan, le lieu des pôles du plan π est PI; le pôle du plan π par rapport à E se trouve donc sur PI, soit I ce point: il est clair qu'il appartient à C, d'après la définition même de cette courbe. On voit que le cône T passe par les normales en P aux surfaces homofocales à E qui passent par ce point P; il contient d'ailleurs PO, ainsi que les parallèles aux axes de E. Ce cône ne change pas quand l'on substitue à E une quadrique qui possède les mêmes focales. Donc:

Théorème. — *Les normales issues, d'un point* P, *à une série de quadriques homofocales sont situées sur un cône du second ordre.*

5. — Comme chacun sait, ces résultats s'expliquent aisément par le calcul; aussi ne m'arrêterai-je point à les démontrer de nouveau. Supposons que E soit, par exemple, un ellipsoïde; rapportons-le à ses axes principaux; il a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

α, β, γ désignant les coordonnées du point P, la courbe C a pour équations

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y-\beta}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z-\gamma}{\frac{z}{c^2}};$$

et l'on peut prendre, pour coordonnées d'un de ses points M:

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2+\lambda}, \quad y = \frac{b^2\beta}{b^2+\lambda}, \quad z = \frac{c^2\gamma}{c^2+\lambda}.$$

A $\lambda = 0$, correspond le point P; et, à $\lambda = \infty$, le point O. Le plan polaire du point M a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2+\lambda} + \frac{\beta y}{b^2+\lambda} + \frac{\gamma z}{c^2+\lambda} - 1 = 0;$$

ce plan enveloppe une développable de la troisième classe. L'équation précédente est d'ailleurs l'équation du plan polaire du point P par rapport à une surface homofocale à E. De là, on conclut que *la polaire réciproque de la courbe* C, *par rapport à la surface* E, *est une développable de la troisième classe, qui demeure la même pour toutes les quadriques homofocales à* E.

6. — Parmi les surfaces homothétiques et concentriques à E, considérons son cône asymptote S; la cubique C, qui passe par le sommet O, rencontre le cône S en quatre autres points. On peut donc, d'un point quelconque, mener quatre normales à un cône du second degré; leurs points d'incidence sont d'ailleurs sur la sphère décrite sur OP comme diamètre. La courbe C est donc tangente à cette sphère au point O, attendu qu'une cubique gauche perce une quadrique en six points, distincts ou confondus. Cela ressort d'ailleurs de ce que l'équation en λ

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2+\lambda)^2} - h = 0$$

a deux racines qui augmentent indéfiniment quand h tend vers zéro, et de ce fait, qu'à une valeur infinie de λ, correspond, sur C, le point O.

Les valeurs de λ, qui correspondent aux pieds des normales au cône, sont données par l'équation

$$\frac{a^2\alpha^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2\gamma^2}{(c^2+\lambda)^2} = 0.$$

Posons $a^2 + \lambda = \frac{1}{\rho}$; cette équation pourra s'écrire, en la rendant entière,

$$a^2\alpha^2[\rho(b^2 - a^2) + 1]^2[\rho(c^2 - a^2) + 1]^2 + \ldots = 0.$$

La somme des racines est

$$-2\frac{b^2 - a^2 + c^2 - a^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} = 2\left[\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - c^2}\right];$$

l'abscisse du point M_i étant

$$\frac{a^2\alpha}{a^2 + \lambda_i} = a^2\alpha\rho_i,$$

l'abscisse du centre de gravité G du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ a pour valeur

$$\frac{1}{2}a^2\alpha\left[\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - c^2}\right].$$

Or les asymptotes L, L′, L″ de C ont pour équations

$$\text{L} \qquad x = x_1 = \frac{a^2\alpha}{a^2 - c^2} \qquad y = y_1 = \frac{b^2\beta}{b^2 - c^2}$$

$$\text{L}' \qquad y = y_2 = \frac{b^2\beta}{b^2 - a^2} \qquad z = z_2 = \frac{c^2\gamma}{c^2 - a^2}$$

$$\text{L}'' \qquad z = z_3 = \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2} \qquad x = x_3 = \frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}.$$

L'abscisse $\frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{1}{2}a^2\alpha\left[\frac{1}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 - c^2}\right]$ du centre du parallélipipède construit sur L, L′, L″ est précisément égale à l'abscisse du point G; les autres coordonnées de ces deux points sont aussi égales.

Donc, *le centre du parallélipipède construit sur les asymptotes de la cubique* C, *coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets les pieds des normales menées, du point* P, *au cône asymptote de* E.

Les paramètres directeurs de la tangente au point M_i étant

$$\frac{dx_i}{d\lambda_i} = -\frac{a^2\alpha}{(a^2 + \lambda_i)^2}, \qquad \frac{dy_i}{d\lambda_i} = -\frac{b^2\beta}{(b^2 + \lambda_i)^2},$$

$$\frac{dz_i}{d\lambda_i} = -\frac{c^2\gamma}{(c^2 + \lambda_i)^2},$$

la relation

$$\frac{(a^2 + \lambda_i)}{{}^2\alpha^2} + \frac{(b^2 + \lambda_i)}{b^2\beta^2} + \frac{(c^2 + \lambda_i)}{c^2\gamma^2} = 0,$$

ou
$$\alpha \frac{dx_i}{d\lambda_i} + \beta \frac{dy_i}{d\lambda_i} + \gamma \frac{dz_i}{d\lambda_i} = 0,$$
montre que cette droite est perpendiculaire à OP, dont les paramètres directeurs sont α, β, γ.

En conséquence, *les tangentes à la cubique* C *aux points où elle rencontre le cône asymptote de* Σ *sont parallèles à un même plan, qui est perpendiculaire à la droite* OP.

On remarquera l'analogie qui existe entre les deux propriétés de la cubique C, que nous venons de signaler, et les propriétés de l'hyperbole d'Apollonius dont on a fait usage pour construire le centre de cette courbe (Niewenglowski, *Journal de Math. spéc.*, 1884).

NOTE SUR LA CARDIOÏDE ET LA TRISECTRICE DE MACLAURIN

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

Soit C une cardioïde ayant pour point de rebroussement le point R, pour foyer triple le point F et pour sommet le point S. Ces points sont en ligne droite et on a RS = 4RF.

M. de Longchamps a remarqué que *la polaire réciproque de la cardioïde* C *par rapport au cercle de centre* F *et de rayon* FS *est une tristectrice de Maclaurin* T. Nous ferons, pour notre part, observer que *la transformée par rayons vecteurs réciproques de la cardioïde* C *par rapport au cercle de centre* R *et de rayon* RS *est une parabole* P *de foyer* R *et de sommet* S. Nous ne saurions dire si cette remarque est nouvelle ; en tout cas, nous ferons observer qu'elle permet de déduire, des propriétés de la parabole, des propriétés corrélatives pour la cardioïde, et ensuite, par la remarque de M. de Longchamps, pour la trisectrice. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet qu'il serait bien facile de développer. Nous nous contenterons de donner un exemple d'application de cette méthode. Prenons cette propriété bien connue de la parabole :

Le lieu des symétriques du foyer d'une parabole par rapport aux tangentes à cette courbe est la directrice.

Transformant par rayons vecteurs réciproques relativement au cercle de centre R et de rayon RS, on a ce théorème :

Le lieu des centres des cercles qui passent par le point de rebroussement d'une cardioïde et qui sont tangents à cette courbe, est le cercle qui a pour centre le foyer triple de la courbe et qui passe par le point de rebroussement.

Transformant à son tour cette propriété par polaires réciproques relativement au cercle de centre F et de rayon FS, on a cette propriété de la trisectrice de Maclaurin :

Soit F *le symétrique du point de rebroussement d'une trisectrice de Maclaurin par rapport au milieu de la distance du sommet de cette courbe à son asymptote. L'enveloppe des directrices des paraboles tangentes à la trisectrice, tangentes à son asymptote et ayant pour foyer le point* F, *est le cercle de centre* F *qui est tangent à l'asymptote.*

Toute propriété de la parabole conduira ainsi à une propriété corrélative (plus ou moins simple) de la cardioïde et de la trisectrice de Maclaurin. Il y a là une source d'exercices intéressants sur l'application des deux classiques méthodes de transformations par rayons vecteurs et par polaires réciproques.

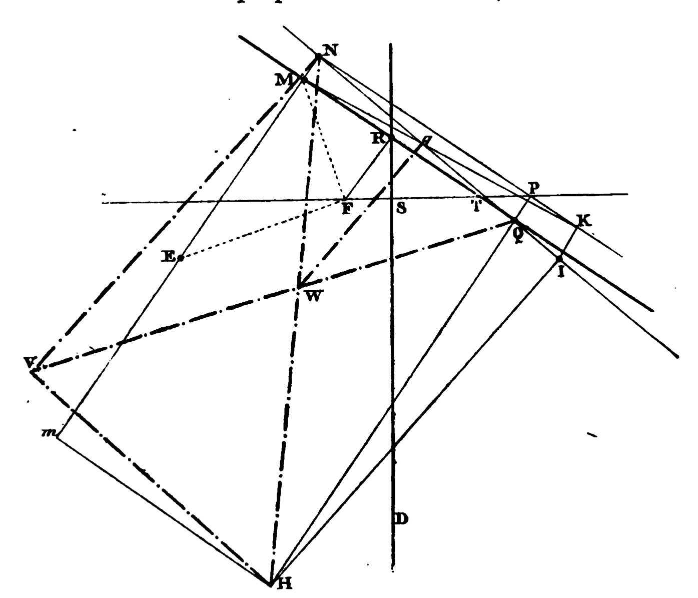
On peut encore déduire des propriétés de la trisectrice de Maclaurin d'une autre remarque. La construction de cette courbe indiquée par M. de Longchamps dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (1886, p. 205) est la suivante : *Étant données les droites* D *et* FP *perpendiculaires entre elles et les points* F *et* P, *tels que* SP = 3FS, *on tire* FR *quelconque*, RQ *perpendiculaire à* FR, PQ *perpendiculaire à* RQ. *Le lieu du point* Q *est la trisectrice de Maclaurin.*

Puisque MRQ est droit, RQ enveloppe une parabole de foyer F et de sommet S, et cette droite touche son enveloppe en un point M tel que RM = TR. La trisectrice est donc la podaire de cette parabole relativement au point P, et comme FP = 4FS, on voit que *la trisectrice de Maclaurin est la podaire d'une parabole relativement au point symétrique du foyer par rapport à la directrice de cette parabole.* Les propriétés

générales des podaires donneront par cette remarque des propriétés de la trisectrice. Nous allons faire voir ici, comment on se trouve ainsi conduit à une construction simple *par la règle et l'équerre* (condition posée par M. de Longchamps) du centre de courbure de la trisectrice.

Pour le centre de courbure des podaires, plusieurs constructions générales ont été indiquées ; entre autres, une par M. Mannheim (*Cours de Géométrie descriptive ds l'Ecole Polytechnique*, 1re édition, p. 197); une autre, par nous-même (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, 1880, p. 301). Nous appliquerons ici ces deux constructions après avoir légèrement modifié celle de M. Mannheim, de façon à n'avoir besoin pour l'effectuer que de la règle et de l'équerre.

Élevons en M une perpendiculaire à MT; c'est la normale



à la parabole. Si elle coupe en N la perpendiculaire élevée en P à PQ, QN est la normale à la trisectrice en Q. En F élevons à MF une perpendiculaire qui coupe en E la normale à la parabole, et portons sur cette droite le segment $Em = ME$; le point m est le centre de courbure de la parabole répondant

au point M. Soit enfin H le point où la perpendiculaire élevée en m à Mm coupe la droite PQ. Les modes de détermination du centre de courbure q de la trisectrice, répondant au point Q seront les suivants :

1° *D'après la construction générale de M. Mannheim, — abaisser du point* H *la perpendiculaire* HI *sur* NQ, *et du point* I *la perpendiculaire* IK *sur* NP; *la droite* MK *coupe la normale* QN *au centre de la courbure* q.

2° *D'après notre construction générale, — en* N *élever à* NQ *la perpendiculaire* NV, *et abaisser du point* H *sur cette droite la perpendiculaire* HV. *Du point* W *où* VQ *coupe* NH, *abaisser sur la normale* NR *une perpendiculaire dont le pied est le centre de courbure* q.

On pourrait, à titre d'exercice de géométrie, démontrer la coïncidence des points q obtenus par ces deux constructions.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 175).

CORRESPONDANCE DE POINTS ET DE DROITES

27. Point et droite harmoniquement associés (M, μ). — Si on prend les points μ', μ'', μ''' conjugués harmoniques des points M', M'', M''' où les droites AM, BM, CM coupent les côtés du triangle, ces points μ', μ'', μ''' sont sur une même droite que nous noterons par la lettre μ et que nous appellerons avec M. de Longchamps (*J. E.*, 1886) *droite harmoniquement associée* au point M (*). La droite μ corres-

(*) La droite μ a été aussi nommée *polaire trilinéaire* de M, M étant dit *pôle trilinéaire* de μ. Ces expressions créés par M. le colonel Mathieu (*N. A. M.*, 1865), qui trouvent une interprétation dans la théorie des cubiques, ont été adoptés par plusieurs auteurs et notamment par M. J. Neuberg (*J. S.*, 1886, p. 8, et *Mémoire sur le tétraèdre*). Nous adopterons

pondant au point M (α, β, γ)

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}$$

a pour équation :

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

Nous avons déjà, dans ce qui précède, rencontré souvent la droite μ, nous aurons dans la suite, occasion d'indiquer plusieurs applications de la présente association.

28. Points et droites associés *(sens général)*. — A un point M (A, B, C) on associe une droite Δ, correspondant à l'équation :

$$\alpha f(A, B, C) + \beta f(B, C, A) + \gamma f(C, A, B) = 0$$

Il suffira pour construire Δ : 1° de déterminer le point M' (associé à M) et dont les coordonnées sont :

$$f(A, B, C), \qquad f(B, C, A), \qquad f(C, A, B)$$

2° De prendre la droite μ' harmoniquement associée au point M'.

3° Enfin, la transversale réciproque μ'_0, de μ'.

La droite μ'_0, ainsi obtenue, n'est autre que Δ.

29. Examen d'un cas particulier d'une droite et d'un point associés. — Considérons la droite Δ représentée par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

et associons lui le point M dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$\frac{a^2}{A(B-C)}, \qquad \frac{b^2}{B(C-A)}, \qquad \frac{c^2}{C(A-B)};$$

le point M ainsi déterminé se trouve sur le cercle circonscrit à ABC. Donc :

A toute droite remarquable Δ du plan du triangle correspondra un point M du cercle circonscrit, la correspondance

---

ici le terme proposé par M. de Longchamps ; ce terme, dans la géométrie du triangle, nous paraît rappeler, mieux que tout autre, le genre d'association de la droite μ et du point M.

du point et de la droite étant déterminée par la loi géométrique suivante :

Soit A′ le point où Δ rencontre BC, la parallèle à Δ menée par A rencontre le cercle circonscrit en A″; la droite A′A″ et les droites analogues B′B″, C′C″ se coupent sur le cercle circonscrit, au point cherché M (*).

Ainsi, à une droite Δ, correspond un point M; la réciproque n'est pas exacte. Cependant, si l'on prend sur le cercle circonscrit un point quelconque M et si l'on considère son point inverse M_2 (situé à l'infini), une droite quelconque, passant par M_2, a pour transversale réciproque une droite qui fournit le point M, quand on lui applique la loi géométrique, énoncée ci-dessus.

CORRESPONDANCE DE DEUX DROITES (**)

30. Correspondance générale des deux droites. — Supposons que nous sachions faire correspondre 1° Un point M′ à un point M ; 2° une droite μ à un point M, et réciproquement. Alors nous pouvons faire correspondre : à une droite donnée μ un point M, à celui-ci un point M′ ; enfin à ce dernier point une droite μ'. Donc à une droite Δ nous saurons faire correspondre une droite Δ′, toutes les fois que nous saurons établir une correspondance entre deux points et aussi entre un point et une droite. Cette correspondance des droites Δ, Δ′ une fois établie on pourra chercher la loi de correspondance qui unit directement ces droites. Nous allons faire l'application de ces notions générales.

31. Transversales réciproques. (μ, μ_0). — Soit μ une droite et M son point harmoniquement associé ; à ce point M correspond son réciproque M_0 et à M_0 correspond une transversale μ_0, harmoniquement associée. De la correspondance des points et droites harmoniquement associés et des

(*) Voir : G. de Longchamps. *J.-E.*, 1886 p. 270-273. Ce théorème a été donné par M. Mckensie (*Educational Times, question* 6871). On en trouve une démonstration dans *Mathematical questions and solutions* (Vol. XL p. 66 et vol. XLIII, 1885, p. 109).

(**) Pour tout ce qui se rapporte à la correspondance des deux droites voir G. de Longchamps. — *J. E.*, 1886, pp. 243-250.

points réciproques on déduit donc l'association des droites μ, μ_0. Elles ont été appelées (*) par M. de Longchamps *Transversales réciproques*. Nous les noterons par les lettres μ et μ_0 (**).

On déduit facilement de ce qui précède la loi qui unit directement les deux transversales réciproques ; il suffit d'observer que les deux droites μ, μ_0 coupent les côtés du triangles en des *points isotomiques*.

A une droite μ, ayant pour équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

correspond une transversale réciproque μ_0, dont l'équation est

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = 0.$$

32. — Transversales inverses. (μ, μ_2). — Considérons une transversale μ et son point harmoniquement associé M. Prenons le point inverse M_2 et la droite μ_2 harmoniquement associée à ce point. Les deux transversales μ et μ_2 sont appelées *droites* ou *transversales inverses* : nous les noterons par les lettres μ et μ_2. La loi géométrique qui unit directement ces droites est facile à trouver; si μ coupe les côtés du triangle en α, β, γ, les isogonales $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$, (§ 3) de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, donnent trois points α', β', γ', situés sur une même droite qui n'est autre que μ_2 (***).

(*) *A. E. N.*, 1866.

(**) Ces droites remarquables ont des applications nombreuses qui ont été développées par M. G. de Longchamps dans diverses notes. Outre le mémoire fondamental, déjà cité, on peut consulter :

1° *Sur les conchoïdales* (*N. C. M.*, 1879, p. 145) ;

2° *Sur les cubiques unicursales* (*N. C. M.*, 1879, p. 403) ;

3° *Transversales réciproques et applications* (*J. E.*, 1884, p. 272) ;

4° *Courbes diamétrales et transversales réciproques* (*J. S.*, 1882, p. 25) ;

5° *Applications nouvelles des transversales réciproques* (*J. S.*, 1884 ;

6° *Sur l'Hypocycloïde à trois rebroussements* (*J. S.*, 1885, p. 131) ;

7° *Sur les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables* (*J. S* ; p. 131) ;

8° *Détermination des points d'inflexion dans les cubiques circulaires droites*, (*A. F.* ; congrès de Nancy, 1886) ;

On peut aussi se reporter à la *Géométrie analytique*, (t. I ; p. 18) et au *Supplément au cours de mathématiques spéciales*, (p. 101) du même auteur.

(***) Cette proposition a été énoncée pour la première fois par M. le colonel Mathieu (*N. A. M.* 1865). Voir aussi *E.* 1885.

A une droite μ ayant pour équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

correspond une transversale inverse représentée par

$$\frac{\alpha}{Aa^2} + \frac{\beta}{Bb^2} + \frac{\gamma}{Cc^2} = 0$$

33. Droite de Newton, associée d'une droite donnée. — Dans d'autres cas, la correspondance entre deux transversales peut s'établir directement :

Si dans un triangle ABC, on mène une transversale Δ, elle détermine un quadrilatère complet, et l'on sait que les milieux des diagonales de ce quadrilatère sont sur une même droite Δ' que M. de Longchamps appelle *Droite de Newton, associée à* Δ, ou, plus brièvement encore, la *Newtonienne* de Δ.

L'équation de Δ étant

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

celle de Δ' sera

$$\frac{\beta + \gamma - \alpha}{A} + \frac{\alpha + \gamma - \beta}{B} + \frac{\alpha + \beta - \gamma}{C} = 0.$$

La correspondance entre les points M et M' harmoniquement associés aux droites Δ et Δ' est facile à trouver.

Les coordonnées (α, β, γ) de M sont :

$$\frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{C}$$

celles de M' (α', β', γ') sont données par les formules :

$$\alpha'\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) = \beta'\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) = \gamma'\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)$$

elles montrent que *le point réciproque de* M' *est le point anticomplémentaire de* M. *(A suivre.)*

SUR LE TRIFOLIUM

par M. **G. de Longchamps.**

Cette quartique unicursale est caractérisée par les propriétés suivantes :

1° Elle est isotropique; c'est-à-dire qu'elle n'admet pas d'autres directions asymptotiques que celles du cercle.

1° Elle possède un point triple et, en ce point triple, elle présente deux branches rectangulaires.

D'après cela, en prenant pour origine le point triple O, et pour axes de coordonnées les bissectrices des angles formés par les deux tangentes en O qui sont rectangulaires, l'équation du trifolium est

$$(x^2 + y^2)^2 = (Ax + By)(x^2 - y^2).$$

En posant :

$$A = h\cos\alpha, \qquad B = h\sin\alpha,$$

l'équation polaire du trifolium est

$$\rho = h\cos(\omega + \alpha)\cos 2\omega.$$

On voit donc que la courbe est bien déterminée, quand on donne les paramètres A, B. On peut observer que le trifolium coupe les axes de coordonnées en des points P, Q tels que

$$OP = h\cos\alpha = a, \qquad OQ = h\sin\alpha = b.$$

En menant par ces points P, Q des parallèles aux axes, celles-ci se coupent en un point M dont les coordonnées sont, par conséquent, A et — B. A chaque point M, pris dans le plan d'un angle droit, correspond donc un trifolium; et réciproquement.

Pour la commodité du langage, nous dirons que M est le *point caractéristique* du trifolium.

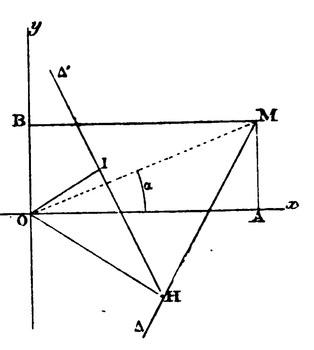
Lorsqu'il est situé sur l'un des axes de coordonnées, la courbe correspondante est le trifolium droit (*C. M. S.*, t. II, p. 512. — *Journal*, 1886, p. 254; et 1887, p. 68). En plaçant le point M sur la bissectrice de yOx, on obtient le folium double (*Journal*, 1885, p. 251; et 1887, p, 67). Dans les autres cas, la quartique n'ayant pas d'axe de symétrie, on peut dire que la courbe est *un trifolium oblique.*

M. Brocard *(loc. cit.)* a considéré le folium double et le trifolium droit, comme des podaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements, relativement à deux points pris sur l'un des axes de cette courbe. Il en a déduit, naturellement, une construction correspondante, pour les normales à ces courbes.

Nous allons étendre au trifolium oblique, avec des modifications convenables, les résultats obtenus par M. Brocard pour le trifolium droit et le folium double.

1. Construction par points du trifolium oblique. — Nous désignerons toujours par M le point caractéristique du trifolium proposé et nous poserons, comme nous l'avons fait tout à l'heure,

$$OM = h, \qquad MOx = \alpha.$$



Par M traçons une droite mobile Δ; soit H la projection de O sur Δ. Si l'on mène par H, Δ' formant avec Δ et l'un des axes un triangle isocèle, le lieu du point I, projection de O sur Δ', est un trifolium.

En effet, soit

$$OI = \rho, \qquad IOx = \omega;$$

la construction indiquée donne sont égaux; on a

$$\rho = OH \cos 2\omega. \qquad (1)$$

D'autre part, le triangle OHM donne

$$OH = h \cos(\alpha + \omega). \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\rho = h \cos(\alpha + \omega) \cos 2\omega.$$

Ainsi le lieu de I est le trifolium.

Nous allons déduire de cette construction (*) un théorème qui généralise celui de M. Brocard, rappelé plus haut.

(A suivre.)

BOURSES DE LICENCE (1887)

— Dans un plan, rapporté à deux axes rectangulaires, on considère le système de cercles S défini par l'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + Aa + Bb + C = o,$$

où A, B, C sont des constantes données, a, b des paramètres variables. Démontrer qu'à chaque point M du plan, correspond un point M', tel

---

(*) On voit que cette construction nous est inspirée par la composition du dernier concours de l'Ecole Polytechnique (V. *Journal*, p. 162.)

que par les deux points M, M' on puisse faire passer une infinité de cercles S. On montrera comment les coordonnées de l'un s'expriment au moyen des coordonnées de l'autre. On prouvera que la droite MM' passe par un point fixe I et que le produit $IM \times IM'$ est constant. Enfin, on cherchera à remplacer la définition analytique des cercles S par une définition géométrique qui mettra en évidence les propriétés qui précèdent.

— Les constantes A, B, C étant données, on propose de déterminer des constantes $A_1 B_1 C_1$ de façon que l'expression

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle en x. A quelle condition cela est-il possible? Les constantes A, B, C sont supposées différentes.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. CATALAN.

... Le théorème démontré par M. Griess est, en partie, dans mon petit mémoire intitulé : *Quelques théorèmes d'Arithmétique* (Académie de Belgique, 1884); mais j'avais supposé p entier, positif. La généralisation indiquée par M. Griess est curieuse; peut-être la démonstration proposée pourrait-elle être simplifiée...

QUESTIONS ÉNONCÉES (*)

SÉRIES

1. $$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}+\dots\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}+\dots$$

Série divergente; on la compare à la série harmonique multipliée par π.

(*) Sous ce titre nous publierons désormais, dans chaque numéro, les énoncés d'un certain nombre de questions posées aux examens de l'École Polytechnique, mais choisies parmi celles qui semblent mériter d'être, plus spécialement, signalées à l'attention des candidats.

A l'occasion, nous ajouterons à l'énoncé quelques mots d'indication; mais, comme par le passé, nous continuerons, dans la partie consacrée aux *Questions d'examens*, l'exposition des exercices qui, par leur difficulté relative, ou par l'intérêt particulier qu'ils présentent, méritent des développements plus complets.

Nous rappelons, à ce propos, à nos lecteurs, que le recueil des

2. $$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \ldots + \frac{1}{1+x^n} + \ldots$$

Série évidemment divergente pour $x \leqslant 1$; convergente, pour $x > 1$. Ce dernier point s'établit, si l'on veut, en la comparant à la progression $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$

3. $$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \quad + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Série connue, convergente.

4. $$\frac{1}{2L^p 2} + \frac{1}{3L^p 3} + \ldots + \frac{1}{nL^p n} + \ldots \text{ (*)}$$

Pour $p = 1$ la série est divergente, c'est la série de M. Bertrand; elle est divergente, *à fortiori*, pour $p < 1$. Dans le cas où p est supérieur à l'unité la série est convergente. On peut le reconnaître, autrement que nous ne l'avons fait (*loc. cit.*), de la manière suivante.

On a

$$\frac{1}{2(L2)^p} = \frac{1}{2(L2)^p}$$

$$\frac{1}{3(L3)^p} + \frac{1}{4(L4)^p} < \frac{1}{2(L4)^p}$$

$$\frac{1}{5(L5)^p} + \ldots + \frac{1}{8(L8)^p} < \frac{1}{2(L8)^p}$$

D'où il résulte que la somme des termes de la série proposée est plus petite que celle de la série

$$\frac{1}{2(L2)^p}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\right)$$

laquelle est convergente, pour $p > 1$. La convergence de la série en question se trouve donc établie, dans cette même hypothèse, $p > 1$.

5. $$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \ldots$$

Série harmonique, multipliée par 2.

---

questions posées au dernier concours de l'École Polytechnique est publiée par la librairie Croville-Morant-Foucart, 20, rue de la Sorbonne. Ils trouveront, dans cette publication, en très grand nombre, d'autres énoncés intéressants. G. L.

(*) Voyez *Journal*, 1886, p. 164; et 1887, p. 19.

6. $$\sin x + \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2^2} + \ldots + \sin \frac{x}{2^n}.$$

Série convergente. — On la compare à la série $\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \ldots$

7. $$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{n^2 - 1} \ldots$$

Série convergente, parce que $\lim n^2 u_n = 1$; elle est aussi sommatoire en vertu de l'identité

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1}.$$

8. — Si $\lim \frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ est égale à 1, la série est convergente.

(V. *Supplément*, p. 39, ex. 18).

EXERCICES ÉCRITS (*)

1. — On donne une circonférence Γ et l'on joint un point M, mobile sur cette circonférence, aux extrémités A, B d'une corde fixe; ayant mené une tangente Δ, parallèle à BM, la droite AM rencontre Δ en un certain point I; trouver le lieu décrit par ce point.

2. — Dans ces mêmes conditions, une droite Δ' tangente à Γ, et parallèle à AM, rencontre Δ en un point M'; on joint MM' et l'on propose de trouver le lieu décrit par le point J, milieu de MM'.

(*) Sous ce titre, nous indiquerons, chaque mois, une ou plusieurs questions, pouvant servir d'exercice utile à la préparation de la composition écrite proposée aux examens de l'École Polytechnique, ou à ceux de l'École Normale. Le numéro suivant fera connaître les résultats principaux de cet exercice.

Dans l'intervalle, les abonnés pourront, s'ils le veulent, nous adresser leurs solutions; elles leur seront renvoyées, annotées.

Nous donnerons d'abord quelques problèmes très simples à la portée de tous; nous en proposerons ensuite, dans le courant de l'année, de plus difficiles. G. L.

QUESTIONS D'EXAMEN

18 (*). — *On donne un paraboloïde hyperbolique équilatère, et une ellipse dans un de ses plans directeurs. A cette ellipse, on mène une tangente, et on considère une génératrice du paraboloïde qui lui soit perpendiculaire : lieu de la perpendiculaire commune à la tangente et à la génératrice.*

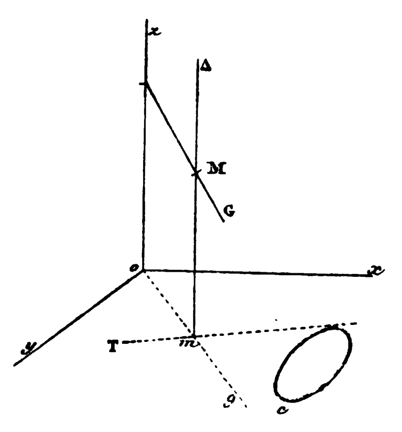
Je vais démontrer que ce lieu se compose :

1° *D'un cylindre droit, ayant pour base une podaire de l'ellipse :*

2° *De deux paraboloïdes hyperboliques, égaux entre eux et égaux au paraboloïde donné ;*

3° *D'un plan.*

Prenons pour origine le sommet du paraboloïde, pour axe des x, l'axe de la surface et pour plans yox et zox les plans directeurs du paraboloïde (*). Soit c l'ellipse donnée, dans le plan yox. Il y a lieu de considérer successivement les génératrices qui sont parallèles au plan xoy et celles qui sont parallèles au plan zox.



Si G est une génératrice parallèle à xoy, il lui correspond toujours une tangente rectangulaire T. La perpendiculaire commune à G et à T est parallèle à oz ; soit d'ailleurs og la projection de G sur xoy : elle coupe T en m, et m est la trace de la perpendiculaire commune. Or,

(*) La solution qui suit nous a été adressée par M. Georges Maupin, élève au lycée de Rennes.

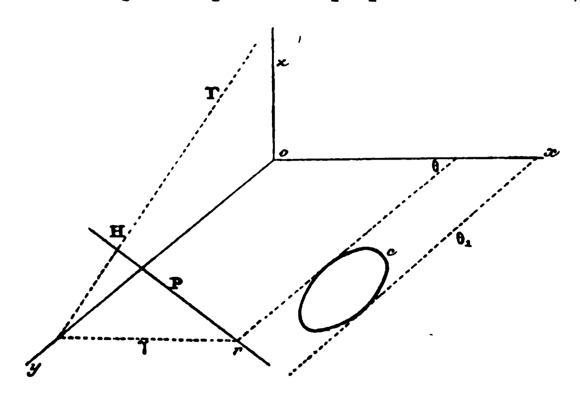
(**) Dans ce système d'axes, son équation est $yz = ax$; mais elle ne nous sera pas utile.

le lieu du point m est visiblement la podaire de o par rapport à l'ellipse; on sait que ce lieu est une quartique. Ainsi, le lieu de Δ est un cylindre du quatrième ordre;

2° Considérons maintenant une génératrice Γ parallèle à zox (*fig.* 2) : supposons qu'il lui corresponde une tangente θ à l'ellipse c. L'angle droit formé par Γ et θ a un côté dans le plan xoy; donc, il se projette sur ce plan suivant un angle droit: or la projection γ de Γ est parallèle à ox, donc θ sera perpendiculaire à ox.

Ainsi, la tangente θ est menée à l'ellipse c parallèlement à oy. Il y a deux tangentes parallèles à oy, je les désignerai par θ et θ_1.

Cherchons le lieu correspondant à θ : γ et θ se coupent en r, menons par ce point rH perpendiculaire à Γ; cette



droite P représente la perpendiculaire commune P. Or, supposons que le paraboloïde donné glisse d'abord parallèlement à lui-même, le long de ox, de manière que oy vienne s'appliquer sur θ; puis, qu'on lui imprime une rotation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$, autour de θ. On voit alors que la génératrice Γ sera confondue avec P. Ainsi à toute génératrice du paraboloïde correspondra une génératrice du lieu; le paraboloïde sera donc confondu avec le lieu de P; etc.

3° Nous avons dit (2°) qu'une génératrice Γ se projette parallèlement à ox : il y a exception pour la génératrice oz. Cette

génératrice est projetée suivant le point o, elle est perpendiculaire à toutes les tangentes à c, et le lieu des perpendiculaires communes, qui lui correspondent, est le plan xoy.

(A suivre.)

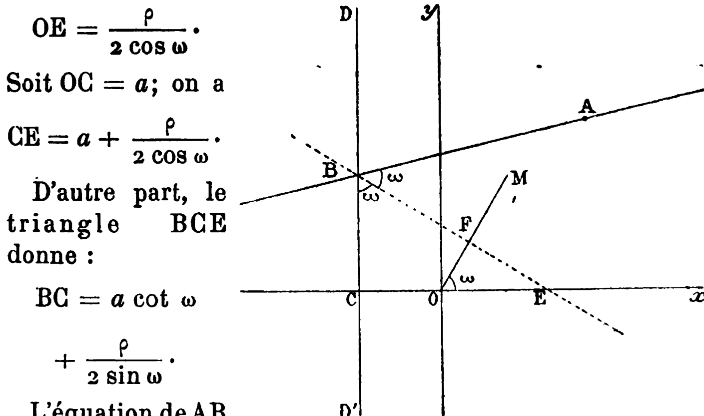
QUESTION 99

Solution par M. E. Fesquet, au lycée de Nîmes.

On donne dans le plan une droite fixe DD′ *et deux points fixes* O *et* A. *Par le point* O *on mène deux cercles tangents tous deux à la droite fixe* DD′ *et à une autre droite quelconque issue du point fixe* A, *On demande d'étudier le lieu décrit par le second point M d'intersection de ces deux cercles, quand la droite* AB *tourne autour du point* A.

Ce lieu peut évidemment se définir ainsi : étant donnés une droite fixe DD′ et deux points fixes O et A, trouver le lieu du symétrique du point O par rapport à la bissectrice de l'angle formé par DD′ et une droite mobile, issue de A. Menons Ox perpendiculaire à DD′.

Soient $OM = \rho$ et $MOx = \omega$. Le triangle FOE donne



$$OE = \frac{\rho}{2\cos\omega}.$$

Soit $OC = a$; on a

$$CE = a + \frac{\rho}{2\cos\omega}.$$

D'autre part, le triangle BCE donne :

$$BC = a\cot\omega + \frac{\rho}{2\sin\omega}.$$

L'équation de AB rapportée aux axes Cx et CD est donc

$$y - a\cot\omega - \frac{\rho}{2\sin\omega} = x\,\mathrm{tg}\left(2\omega - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ou, en exprimant que cette droite passe par le point fixe A (α, β),

$$\beta - a\cot\omega - \frac{\rho}{2\sin\omega} + \alpha\cot 2\omega = 0.$$

Telle est l'équation du lieu en coordonnées polaires, ox étant l'axe polaire et o le pôle. L'équation en coordonnées rectilignes est, en prenant pour axes ox et oy,

$$\beta - a\frac{x}{y} - \frac{x^2 + y^2}{2y} + \frac{\alpha(x^2 - y^2)}{2xy} = 0,$$

ou

$$x(x^2 + y^2) + 2x(ax + \beta y) - \alpha(x^2 - y^2) = 0.$$

Le lieu est donc une cubique Γ, ayant un point double à l'origine; elle passe par les ombilics du plan; c'est une *cubique circulaire* ayant pour asymptote réelle la droite qui correspond à l'équation

$$x + \alpha = 0.$$

Construisons Γ, en la considérant comme une courbe unicursale. A cet effet, posons

$$y = tx;$$

Nous avons alors

$$x = -\frac{\alpha t^2 - 2\beta t + 2a - \alpha}{1 + t^2},$$

$$y = -t\frac{\alpha t^2 - 2\beta t + 2a - \alpha}{1 + t^2}.$$

Considérons l'équation en t:

$$\alpha t^2 - 2\beta t + 2a - \alpha = 0.$$

Pour qu'elle ait ses racines réelles, il faut que

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha > 0$$

L'équation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha = 0$, si l'on considère α, β comme des coordonnées courantes, représente un cercle ayant pour centre O et passant par C. Nous désignerons ce cercle par u.

Il y a maintenant divers cas à distinguer.

1° Le point A est extérieur au cercle u; on a:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha > 0$$

Le point O est un point double réel. On voit facilement que la courbe à la forme d'une *branche strophoïdale*. Elle devient

une véritable strophoïde oblique, lorsque les tangentes au nœud sont rectangulaires; ce qui a lieu quand OC = o.

2° Le point A est sur le cercle *u*. Le point O est un point de rebroussement de première espèce. La courbe est une *cissoïde oblique.*

3° Supposons enfin le point A intérieur au cercle *u*. O est alors un point isolé. La courbe a la forme d'une *branche serpentine.*

Si le point A est sur DD', on a $\alpha = 0$; le lieu se décompose : on a l'axe Oy et le cercle $x^2 + y^2 + 2ax - 2\beta y = 0$, ce qui était évident à priori.

Remarque. — Le lieu que nous venons de considérer contient des points répondant à des cercles imaginaires conjugués. Il serait facile de distinguer ces points, de ceux qui répondent à des cercles réels.

NOTA. — Autres solutions par MM. Taratte, élève en mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis ; Marchis, lycée de Rouen ; Fabre, lycée Henri IV; F. Michel au lycée de Montpellier.

QUESTION 132

Solution par M. L. SIRVEN, élève de Mathematiques spéciales au Lycée d'Orléans.

On considère des paraboles P *qui sont tangentes à l'origine à l'axe* OX *et dont les directrices enveloppent la parabole fixe* $y^2 - 2px = 0$ *(axes rectangulaires).*

Démontrer :

1° Que l'équation générale des paraboles P *est* $(y - \lambda x)^2 - 2p\lambda^3 y = 0$, λ *désignant un paramètre variable;*

2° Que l'enveloppe de ces paraboles a pour équation $2x^3 = 27py^2$*;*

3° Que le lieu des foyers est une cissoïde;

4° On propose enfin de trouver l'enveloppe des axes des paraboles P.

Ce lieu est l'hypocycloïde à trois rebroussements.

L'équation focale d'une parabole, dont (α, β) est le foyer, est, en axes rectangulaires,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi+\theta)^2,$$

ou, en ordonnant,

$$(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2-2x(\alpha+\theta\cos\varphi)-2y(\beta+\theta\sin\varphi)+\alpha^2+\beta^2-\theta^2=0.$$

J'écris que ces paraboles sont tangentes en O à Ox, d'où les deux relations

$$\alpha+\theta\cos\varphi=0, \qquad (1)$$

$$\alpha^2+\beta^2-\theta^2=0. \qquad (2)$$

De plus la directrice $x\cos\varphi+y\sin\varphi+\theta=0$ est constamment tangente à $y^2-2px=0$ d'où une troisième relation, obtenue en écrivant que l'équation aux ordonnées d'intersection a une racine double,

$$p\sin^2\varphi-2\theta\cos\varphi=0. \qquad (3)$$

Résolvant (1) et (3) en α et θ j'obtiens

$$\alpha=-\frac{p\sin^2\varphi}{2}, \quad \theta=\frac{p\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}. \qquad (4)$$

Et alors en tenant compte de $\beta^2=\theta^2-\alpha^2$, on conclut

$$\beta=\frac{p}{2}\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi}$$

et, par suite,

$$\beta+\theta\sin\varphi=p\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi. \qquad (5)$$

Revenons à l'équation générale des paraboles P. En tenant compte des relations 1, 2, 5, on a

$$(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2=2py\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi;$$

en posant $\operatorname{tg}\varphi=\lambda$ on a précisément, pour l'équation générale cherchée,

$$(y-\lambda x)^2-2p\lambda^3y=0. \qquad (P)$$

2° *Enveloppe des paraboles* P. — Il suffit d'écrire que l'équation (P) admet une racine double en λ.

J'applique la formule connue

$$(BB'-9AA')^2=4(B^2-3AB')(B'^2-3A'B)$$

qui exprime que l'équation

$$Ax^3+Bx^2+B'x+A'=0$$

a une racine double.

On obtient $\qquad 2x^3=27py^2$

et, en outre, l'axe des x, résultat évident puisque cet axe est tangent aux paraboles.

Cette courbe, bien connue, est symétrique par rapport à l'axe des x et se trouve située tout entière à droite de l'axe des y; elle a une tangente de rebroussement, l'axe des x, et deux branches paraboliques.

3° *Lieu des foyers.* — On obtient ce lieu en éliminant θ et φ entre les relations (1), (2), (3), car α, β sont les coordonnées du foyer.

De (4) on tire

$$\theta^2 = \frac{p^2 \sin^4 \varphi}{4 \cos^2 \varphi},$$

et

$$\sin^2 \varphi = -\frac{2\alpha}{p},$$

d'où

$$\theta^2 = \frac{p\alpha^2}{p + 2\alpha}.$$

En remplaçant dans (2), on a le lieu cherché

$$x^2 + y^2 = \frac{px^2}{p + 2x} \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{-2x^3}{p + 2x}.$$

On reconnaît, sous cette dernière forme, une cissoïde dont l'asymptote a pour équation

$$x = \frac{p}{2}.$$

4° *Enveloppe des axes des paraboles* P. — On trouve aisément, par les méthodes connues, l'équation de l'axe :

$$\lambda^3(p + x) - \lambda^2 y + \lambda x - y = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe demandée il suffit d'écrire que cette équation, du troisième degré en λ, admet une racine commune avec sa dérivée

$$3\lambda^2(p + x) - 2\lambda y + x = 0.$$

L'équation et sa dérivée sont du premier degré en x et y. Je résous donc par rapport à x et y et j'obtiens l'enveloppe au moyen des formules unicursales suivantes :

$$\frac{x}{p} = -\frac{\lambda^2(3 + \lambda^2)}{(\lambda^2 + 1)^2}, \quad \frac{y}{p} = -\frac{2\lambda^3}{(\lambda^2 + 1)^2}.$$

On reconnaît là les égalités qui définissent l'hypocycloïde à trois rebroussements, comme l'a montré M. G. de Longchamps (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, p. 170).

On peut observer que l'x d'un point de la courbe est toujours

négatif et que l'hypocycloïde est située à gauche de la droite oy.

NOTA. — Ont résolu la question: MM. F. Michel et Valabrègue, au lycée de Montpellier; Bèche, professeur à l'école normale de Tulle; Fabre, élève au lycée Henri IV; Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas); Hugon, à Poligny; Voignier; Marchis, au lycée de Rouen; Paul Bourgarel, à Antibes.

M. Fabre démontre, par des considérations purement géométriques, et très simples, que le lieu des foyers des paraboles considérées est une cissoïde.

QUESTION PROPOSÉE

231. — Démontrer les relations combinatoires suivantes (*):

1°
$$1 - \frac{1}{k+1} C_{n,1} + \frac{1}{2k+1} C_{n,2} \dots \mp \frac{1}{nk+1} = \frac{1.2\dots n}{(k+1)(2k+1)\dots(nk+1)} \cdot k^n \ (**)$$

2°
$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \cdot C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \cdot C_{4,2} + \dots + C_{2n,n} = 4^n.$$

3°
$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} C_{p,1} + \frac{1}{n-1} C_{p,2} - \dots = (-1)^p \frac{1}{(n+1) C_{n,p}}.$$

4° Si n est premier avec 6, on a

$$C_{2n-4,n-2} = \mathfrak{M}(n^2 - n). \qquad (E. \ Catalan).$$

(*) Tirées des *Mélanges Mathématiques*.

(**) On pourra déduire, de ce résultat, le développement, en fractions simples, de la fraction rationnelle

$$\frac{1.2\dots n}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}.$$

Comparez (*Alg.* § 527). G. L.

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16488-7.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié.**

(*Suite*, voir p. 175).

---

34. Droites associées *(sens général)*. — Tout ce que nous avons dit pour les points, peut se répéter pour les droites :

Prenons une droite Δ

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o,$$

et associons-lui une droite Δ' ayant pour équation :

$$\alpha f(A, B, C) + \beta f(B, C, A) + \gamma f(C, A, B) = o.$$

La droite Δ' se construira facilement toutes les fois que l'on saura déterminer les deux points M et M' ayant respectivement pour coordonnées :

$$f(A, B, C), \quad f(B, C, A), \quad f(C, A, B);$$

et

$$A, \quad B, \quad C.$$

En effet, M' est le point harmoniquement associé à la transversale réciproque de Δ; si l'on construit la droite μ harmoniquement associée à M, puis, sa transversale réciproque, on obtiendra la droite Δ'.

35. Droites Brocardiennes (μ, μ_ρ, μ_δ). — Considérons une droite μ ayant pour équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = o;$$

elle coupe les côtés du triangle respectivement en A,' B', C'; menons

par	A'	une	parallèle	$A'A_1$	à CA
—	B'	—	—	$B'B_1$	à AB
—	C'	—	—	$C'C_1$	à BC

Les trois points A_1, B_1, C_1 sont sur une même droite, que,

---

(*) Cette droite, appellée quelquefois la *Médiane* du quadrilatère complet, pourrait, comme nous l'avons observée déjà, être appelée la *Newtonienne de* Δ.

par analogie avec les points Brocardiens, nous noterons par μ_δ et que nous appellerons la *Brocardienne directe* de μ. Elle a pour équation :

$$\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{C} + \frac{\gamma}{A} = 0.$$

Si nous effectuons la construction précédente dans le sens inverse, c'est-à-dire en menant, par A', une parallèle à BA, etc... nous obtiendrons une seconde droite μ_ρ qui est la *Brocardienne rétrograde* de μ : Elle est représentée par l'équation :

$$\frac{\alpha}{C} + \frac{\beta}{A} + \frac{\gamma}{B} = 0.$$

36. Droites algébriquement associées (μ, μ_a, μ_b, μ_c). — Étant donnée une droite μ qui coupe les côtés du triangle en A', B', C'; si l'on prend les conjugués harmoniques de ces points et si on les joint deux à deux, on obtient trois droites μ_a, μ_b, μ_c qui sont les *droites algébriquement associées* à μ. Ces quatre droites associées qui correspondent à l'équation :

$$\pm \frac{\alpha}{A} \pm \frac{\beta}{B} \pm \frac{\gamma}{C} = 0$$

forment un quadrilatère complet, dont les diagonales sont les côtés du triangle de référence. Ces droites sont d'ailleurs harmoniquement associées aux points

$$\pm A, \quad \pm B, \quad \pm C.$$

37. Triangles réciproques. — Si l'on considère sur les côtés d'un triangle, des points M', M'_0; M'', M''_0; M''', M'''_0 respectivement isotomiques, les deux triangles M'M''M''', $M'_0M''_0M'''_0$ sont appelés par M. de Longchamps (*J. E.*, 1887, p. 224) *triangles réciproques*.

Deux triangles réciproques M'M''M''', $M'_0M''_0M'''_0$ sont équivalents (*); si donc les trois points M'M''M''' sont sur une même droite μ, c'est-à-dire si la surface du triangle est nulle, les points M'_0, M''_0, M'''_0 sont une droite μ_0 qui est la transversale réciproque de μ. On obtient ainsi une généralisation curieuse du théorème des transversales réciproques.

(*) Voyez : *J. E.*, 1877; pp. 224, 375.

On a vu par les différentes constructions que nous avons données jusqu'ici, et par les citations faites, l'importance des *points et des transversales réciproques;* nous allons encore indiquer quelques-unes de leurs propriétés et de leurs applications.

1° La transversale réciproque est parallèle à la droite qui joint les milieux du quadrilatère complet formé par la transversale proposée avec le triangle. Ces points milieux, et les points où la transversale réciproque rencontre les côtés du triangle, forment deux systèmes homothétiques; le centre de gravité est le centre de cette homothétie, dont le rapport est celui de 2 à 1.

On sait qu'à un point correspond une conique tangente a trois droites fixes (Théorème de Magnus, § 2), ce point et cette conique donnent lieu à la relation suivante :

2° A un point M, correspond une conique Γ inscrite au triangle ABC qui sert de base à la transformation; le point M, le centre de gravité G de ABC et le centre de Γ sont trois points en ligne droite; de plus, le rapport des distances du centre de gravité à ces deux points, rapport pris dans l'ordre que nous venons d'indiquer, est celui de 2 à 1. En d'autres termes : *le centre de Γ est le point complémentaire de* M.

De là on déduit cette conséquence importante :

3° A un point à l'infini de la première figure correspond une parabole dont l'axe est parallèle à la direction donnée.

Pour montrer encore une fois l'importance de la méthode de transformation par points réciproques, nous ferons observer combien il est difficile ordinairement de savoir ce que deviennent, après une transformation, les angles et surtout les propriétés métriques d'une figure donnée; si, le plus souvent, on transforme simplement les propriétés descriptives des figures, il n'en est pas de même des autres. Cette difficulté, par suite de la propriété que nous venons de rappeler, se trouve comme annulée dans la méthode de transformation de M. G. de Longchamps. *(A suivre.)*

SUR LE TRIFOLIUM

par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 203.)

Théorème. — *Le trifolium est la podaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements, lorsque le pôle de la podaire est pris sur le cercle inscrit à l'hypocycloïde.*

Pour le démontrer, cherchons l'enveloppe des droites Δ′, considérées tout à l'heure.

La question se présente alors sous la forme suivante :

On donne un angle droit yOx, un point fixe M et le cercle U décrit sur OM comme diamètre. Par M on fait passer une transversale mobile qui rencontre U en H et par H on trace une droite Δ′ symétrique de MH par rapport à la parallèle à Oy menée par H. L'enveloppe de Δ′ est une hypocycloïde à trois rebroussements.

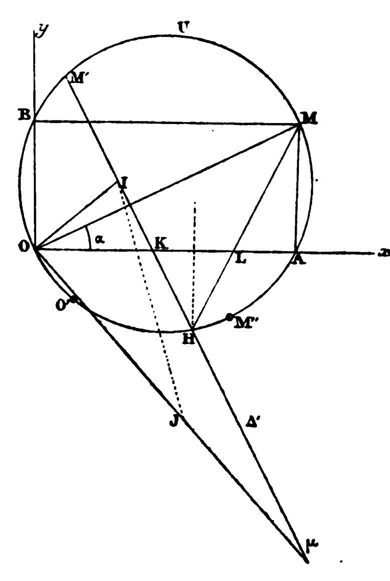


Fig. 1.

Autrement. Lorsqu'une parabole mobile est constamment inscrite dans un angle droit yOx, si la corde des contacts passe par un point fixe, l'axe de la courbe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. (*)

On peut d'abord établir, très simplement, par le calcul, cette proposition.

(*) Cette remarque a été faite également par MM. Brocard et Neuberg (*Mathesis*, p. 183.)

On trouve que l'équation générale des droites Δ', a, b désignant les coordonnées de M, est

$$y + tx + (b - at)\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0.$$

En prenant la dérivée par rapport à t, on a, d'abord,

$$x = \frac{a(t^4 + 4t^2 - 1) - 4bt}{(t^2 + 1)^2},$$

puis

$$-y = \frac{4at^3 + b(t^4 - 4t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}.$$

Il est facile de reconnaître que ces formules représentent l'hypocycloïde à trois rebroussements.

Mais on peut le voir, plus élégamment, par des considérations géométriques.

Cherchons la relation qui existe entre les arcs $OH = u$, $OM' = v$.

On a

$$MLx = \alpha + OMH,$$

et

$$HKx = OHM' + HOx = OHM' + \frac{\pi}{2} - MLx.$$

En observant que, d'après la construction, $MLx = HKx$, on a

$$2MLx = OHM' + \frac{\pi}{2};$$

et, par suite,

$$2OMH + 2\alpha = OHM' + \frac{\pi}{2},$$

ou, finalement,

$$2u - v = \pi - 4\alpha. \qquad (1)$$

Les arcs u et v sont comptés, en sens contraire, à partir de l'origine O; nous pouvons changer cet origine, de façon à faire disparaître la constante qui entre dans la relation précédente.

Soit O' la nouvelle origine; posons

$$OO' = \theta, \quad O'H = U, \quad O'M' = V.$$

Nous avons :

$$u = U + \theta, \quad v = V - \theta$$

et la relation (1) devient

$$2(U + \theta) - (V - \theta) = \pi - 4\alpha,$$

ou

$$2U - V = 0,$$

si l'on pose

$$3\theta = \pi - 4\alpha.$$

Ayant pris $AM'' = AM$, puis $OO' = \frac{1}{3}OM''$, le point O'

représente la nouvelle origine et l'on peut considérer Δ' comme une corde mobile dans un cercle fixe, les arcs O'H O'M' vérifiant toujours la relation

$$O'M' = 2O'H,$$

et le point O' étant fixe.

Daus ces conditions, on sait (*) que Δ' enveloppe une hypo-

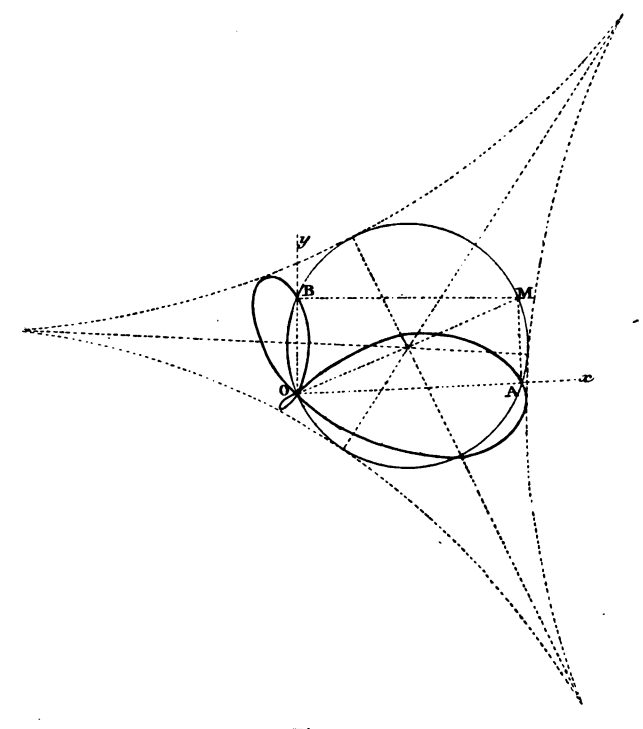


Fig. 2.

cycloïde à trois rebroussements; U est le cercle inscrit à cette courbe, O' est l'un des sommets. La figure ci-dessus montre quelle est la disposition de l'hypocycloïde et du trifolium qui correspond au point O, pris sur U.

(*) V. *Journal* 1884, p. 176, § 10, alinéa 6e.

2. Construction de la normale au trifolium. — Du théorème précédent on déduit, naturellement, la construction de la normale au trifolium.

On sait en effet (*loc. cit.*, alinéa 7[e]) qu'en prolongeant (*fig. 1*) M'H d'une longueur $H\mu = M'H$, μ est le point de contact de HM' avec l'hypocycloïde. Par conséquent, par application d'un principe classique (*C. M. S.*, t. II, p. 33; § 31), la droite IJ qui va, de I, au milieu J de $O\mu$, est la normale au trifolium.

QUESTIONS ÉNONCÉES

DÉRIVÉES

1. — Dérivée de

$$y = \text{arc tg}\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}, \qquad y' = \pm 1$$

On peut tirer de là, en effet, par un calcul évident

$$\pm y = \frac{\pi}{4} - x.$$

2. — Dérivée de

$$y = \text{L}\,\frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}, \qquad y' = \frac{-2}{\cos x}$$

3. — Dérivée de

$$y = a^{\text{L}g_a \text{ arc tg} \frac{\sin x}{\cos x}}, \qquad y' = 1$$

En prenant les logarithmes on voit que $y = x$; on vérifie, par le calcul direct, que l'on a bien $y' = 1$.

4. — Dérivée de

$$y = \text{arc tg}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad y' = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

5. — Dérivée de

$$\text{L}g_a \text{ arc sin } 2x\sqrt{1 - x^2}.$$

$$y = a \qquad\qquad y' = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

En prenant les logarithmes des deux membres, dans le système de base a, et en posant $x = \sin \varphi$, on trouve

$$y = 2\varphi = 2 \text{ arc sin } x.$$

6. — Dérivée d'ordre n de

$$y = (x - a)^n (x - b)^n.$$

On applique la formule de Leibniz

$$d^n(uv) = vd^n u + C'_n dvd^{n-1} u + \ldots + C^n_n ud^n v,$$

et l'on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n! \left\{ (x - b)^n + \frac{n}{1}(x - b)^{n-1}(x - a) + \frac{n(n-1)}{1.2}(x - b)^{n-2}(x - a)^2 + \ldots + (x - a)^n \right\}.$$

7. — Dérivée d'ordre n de

$$y = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

On a

$$y' = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = (x + i)^{-\frac{1}{2}}(x - i)^{-\frac{1}{2}}$$

et on applique la formule de Leibniz.

8. Dérivée de

$$y = \text{arc sin } x + \text{arc tg} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

On trouve $y' = 0$; la fonction y est constante. On peut le vérifier facilement par un changement de variable, en posant $x = \sin \varphi$.

9. — Dérivée d'ordre n de

$$y = \text{arc tg } x.$$

Cet exercice rentre dans celui qui porte le n° 6 en observant que

$$y' = (x + i)^{-1}(x + i)^{-1}.$$

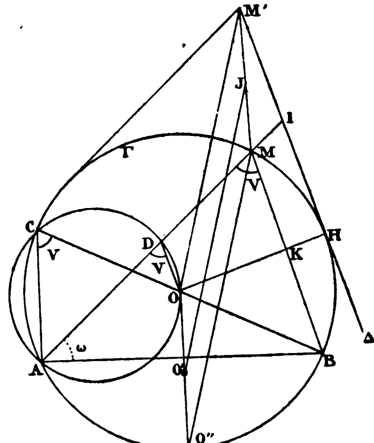
EXERCICES ÉCRITS

3. — On donne une ellipse Γ rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

et l'on considère, dans son plan, une droite Δ représentée par l'équation

$$A\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} - 1 = 0.$$



1° On demande l'équation du cercle qui passe par l'origine et par les points communs à Γ et à Δ.

2° En déduire l'équation générale des cercles C qui, passant par le centre de Γ, sont tangents à cette courbe.

3° Soit M ce point de contact; les cordes principales, passant par M, rencontrent C en des points dont on demande le lieu géométrique.

4° Ce lieu est évidemment une courbe unicursale; exprimer les coordonnées d'un de ses points, en fonction d'un paramètre variable *t*.

Notes sur les exercices 1 et 2.

1. — En prenant A pour origine, AB pour axe polaire, on a

$$\rho = OM + MI = OM + \frac{KH}{\sin V} = 2R\sin(V + \omega + R\frac{1 - \cos\omega}{\sin V},$$

$$\rho = \frac{R}{\sin V}[1 - \cos(2V + \omega)].$$

Le lieu est donc un limaçon de Pascal. On le démontre géométriquement de la manière suivante.

Soit C le point diamétralement opposé à B; on considère le cercle AOC qui coupe AI en D. La longueur DI est constante et égale à $\frac{R}{\sin V}$. D'ailleurs, le diamètre du cercle AOC est $\frac{AO}{\sin V} = \frac{\sin V}{R} = DI$. Concluons donc que *le lieu demandé est une cardioïde.*

On observera que l'angle en I étant constant, *on peut considérer la cardioïde comme une podaire oblique* relativement au cercle Γ, le pôle des rayons vecteurs étant en A. En considérant deux positions infiniment voisines du point mobile I, on voit aussi que la normale en I à la cardioïde passe par le centre du cercle circonscrit au triangle AIH.

Dans cette solution, on préconise l'adoption des coordonnées polaires pour arriver rapidement à l'équation du lieu et, aussi, l'emploi

des considérations géométriques : tant, pour reconnaître la simplicité du résultat, que pour vérifier les calculs qu'on a faits.

Cette observation s'applique à l'exercice 2.

2. — Abaissons de O, centre de Γ, une perpendiculaire sur AB; M'O et MO' sont deux droites parallèles, parce qu'elles sont les bissectrices de deux angles dont les côtés sont parallèles et de même direction. Soit O' le milieu de OO'. Posons O'J = ρ, JOO' = φ nous avons

$$2\rho = OM' + O'M = OM' + 2R\cos\varphi,$$

ou

$$\rho = R\cos\varphi + \frac{OM'}{2}.$$

Le lieu est un limaçon de Pascal, etc.

Remarque. — Cette construction, points par points, du limaçon, telle qu'elle résulte des remarques précédemment faites et de cette observation évidente que M' décrit un cercle, rentre dans une génération des courbes qui peut se définir ainsi : Étant données deux courbes U, V et deux pôles fixes O, O'; on mène, par ces points, deux droites mobiles parallèles Δ, Δ'. Soient M un point commun à Δ et à U et M' un point commun à Δ' et à V; trouver le lieu W décrit par le point J milieu de MM'.

On pourra noter que la normale à W peut se construire, très simplement, par la considération des sous-normales.

QUESTIONS D'EXAMEN

19. — *La série* U

$$U = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots,$$

est-elle convergente? Calculer sa valeur à 0.01 *près.*

La série est évidemment convergente, car elle a ses termes, à partir du troisième, plus faibles que ceux de la progression géométrique V,

$$V = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Pour avoir la valeur de U à 0.01 près, il suffit de chercher, dans V, quel est le terme de cette suite qui donne

$$\frac{1}{2^{x+1}} + \frac{1}{2^{x+2}} + \cdots < \frac{1}{100}. \qquad (1)$$

Si l'on détermine le plus petit nombre entier x qui vérifie

cette inégalité, en prenant les x premiers termes de U, la somme de ces termes représente, évidemment, la valeur de U à 0.01 près.

L'inégalité (1) peut s'écrire

$$\frac{\frac{1}{2^{x+1}}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{1}{100},$$

ou

$$2^x > 100.$$

On a donc

$$x > \frac{2}{\log 2};$$

comme $\log 2 = 0.30103$, on voit qu'en prenant les sept premiers termes de la série U on obtient, avec certitude, sa valeur à 0.01 près.

20 (*). — *Intégrer la différentielle*

$$dy = \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \cdot$$

On divise, haut et bas, par $\cos 4x$ et en posant

$$\operatorname{tg} x = z,$$

on a

$$y = \int \frac{zdz}{1+z^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2)}{1+(z^2)^2}.$$

ou, finalement, $y = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} (\operatorname{tg}^2 x) + C^{te}$.

21. — *Un jardin a la forme d'un rectangle* ABCD, *un ruisseau coule le long de* CD; *combien faudra-t-il payer pour arroser le jardin?*

Soient $CA = a$, $CD = b$ les dimensions du rectangle; prenons sur CD un élément dx. Pour arroser le rectangle qui correspond à cet élément on doit payer une somme représentée par

$$dx \int_0^a ydy = \frac{1}{2} a^2 dx.$$

(*) Question proposée dans les *Annals of Mathematics* de l'Université de Virginie; nº de juin 1887, p. 95.

La dépense totale est

$$\int_0^b \frac{1}{2} a^2 dx = \frac{1}{2} a^2 b.$$

22. *Développement de cos* mx, *en fonction de cos* x.

La formule de Moivre, comme l'on sait, donne le développement de $\cos mx$ en fonction de $\cos x$ et des puissances paires de $\sin x$; en remplaçant, dans ce développement, $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on a, finalement, l'expression de $\cos mx$ en fonction de $\cos x$. Mais ce calcul ne donne pas, sous forme explicite, les coefficients des termes en $\cos^m x$, $\cos^{m-2} x, \ldots$; voici comment on peut obtenir immédiatement ces coefficients.

Les formules bien connues qui donnent en fonction de $\cos x$ les valeurs des fonctions

$$\cos 2x, \quad \cos 3x, \ldots; \quad \frac{\sin 2x}{\sin x}, \quad \frac{\sin 3x}{\sin x}, \quad \ldots;$$

et l'égalité

$$\cos mx = \cos (m - 1) x \cos x - \sin (m - 1) x \sin x, \quad (1)$$

prouvent que $\cos mx$ ne renferme que les puissances m, $m - 2$, etc., de $\cos x$. Il suffit d'admettre la loi pour les fonctions

$$\cos (m - 1)x, \quad \text{et} \quad \frac{\sin (m - 1)x}{\sin x}$$

et l'on vérifie, d'après (1), qu'elle subsiste pour $\cos mx$.

Dans le cas où m est pair, on voit aussi que le premier terme de $(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx$ est égal à l'unité, et que si m est impair le premier terme de $(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mx$ est égal à $\cos x$.

Posons donc (m *pair*)

$$\cos x = z,$$

et

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = 1 - A_1 z^2 + A_2 z^4 \ldots. \quad (2)$$

et proposons-nous de déterminer les coefficients A_1, $A_2, \ldots$.

L'égalité (2) donne d'abord

$$-(-1)^{\frac{m}{2}} m \sin mx = \sin x \left\{ 2A_1 z - 4A_2 z^3 \ldots \right\},$$

puis, par une nouvelle différentiation,

$$\left\{ \begin{aligned} -(-1)^{\frac{m}{2}} m^2 \cos mx = {} & z(2A_1 z - 4A_2 z^3 + \ldots \} \\ & + (z^2 - 1)\{1.2A_1 - 3.4A_2 z^2 + \ldots \} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Comparant (2) et (3), on a

$$A_1 = \frac{m^2}{1.2} \quad \text{ou} \quad A_1 = \frac{m.m}{1.2}$$

$$A_1(4 - m^2) + 3.4A_2 = 0, \qquad A_2 = \frac{(m+2)m.m(m-2)}{4!},$$

. . . .

La loi observée sur les premiers coefficients se généralise sans difficulté, grâce aux formules (2) et (3), pour les coefficients quelconques. On trouve ainsi

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = 1 - \frac{m.m}{2!}\cos^2 x + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{4!}\cos^4 x - \frac{m+4)(m+2)m.m(m-2)m-4)}{6!} = \cos^6 a + \ldots \quad (m \text{ pair.})$$

Un calcul semblable donne

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = \frac{m}{1}\cos x = \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\cos^3 x + \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{5!}\cos^5 x \ldots \quad (m \text{ impair.})$$

et,

$$\sin mx = \cos x \left\{ \frac{m}{1}\sin x - \frac{(m+2)m(m-2)}{3!}\sin^3 x \ldots \right\} \quad (m \text{ pair.})$$

$$\sin mx = \frac{m}{1}\sin x - \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\sin^3 x \ldots \quad (m \text{ impair.})$$

On trouvera une autre démonstration de ces formules dans la *Trigonométrie de Serret* (3e édition, 1862, p. 203).

On trouve aussi (*Nouvelles Annales*, 1847, p. 400) une démonstration très ingénieuse de la formule en question, démonstration indirecte il est vrai, et reposant sur l'identité

$$\left.\begin{aligned} a^n + b^n &= (a+b)^n - \frac{n}{1}ab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4} \\ \ldots &+ (-1)^p a^p b^p \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2p+1}{2} \cdots \frac{n-p-1}{p}(a+b)^{n-2p} + \ldots, \end{aligned}\right\} (1)$$

dans laquelle n est entier et positif.

Comme beaucoup d'identités, celle-ci peut se démontrer en observant qu'elle est vraie pour $n = 1$, pour $n = 2, \ldots$ puis

en établissant qu'étant reconnue exacte pour $n = K$ elle est encore vraie pour $n = K + 1$ (*).

Si, dans cette identité, on suppose

$$a = \cos\varphi + i \sin\varphi, \qquad b = \cos\varphi - i \sin\varphi$$

on a

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}\cos^n\varphi - n.2^{n-3}\cos^{n-2}\varphi\, \frac{n(n-3)}{1.2}\, 2^{n-5}\cos^{n-4}\varphi$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\, 2^{n-7}\cos^{n-6}\varphi + \ldots,$$

formule dans laquelle on peut supposer n pair ou impair.

QUESTIONS 78 ET 79

Solution par M. X. BARTHE.

1° Soit ABCD *un quadrilatère inscriptible. Désignons par* A_1 *la surface du triangle* BCD, *et par* P_1 *la puissance du point* A *par rapport à un cercle quelconque* Δ *situé dans le plan du quadrilatère. Désignons de même par* B_1 *et* P_2 *les quantités analogues pour le point* B, *etc. Prouver que l'on a la relation*

$$A_1P_1 - B_1P_2 + C_1P_3 - D_1P_4 = 0.$$

Déduire, de là, les propriétés du quadrilatère inscriptible.

(X. A.)

Prenons deux axes rectangulaires quelconques, passant par le centre du cercle Δ; et soient x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4 les coordonnées des quatre sommets du quadrilatère.

Puisque ces points sont sur un même cercle leurs coordonnées satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) A cet effet, comme l'indique M. Mention *loc. cit.*, on multiplie par $a + b$ les deux membres de (1).

ou, en développant,

$$(x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \ldots = 0. \quad (1)$$

Considérons le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} R^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ R^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ R^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ R^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

dans lequel R désigne le rayon de Δ; il est évidemment nul. Développons-le par rapport aux éléments de la 1re colonne, on a

$$R^2\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - R^2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \ldots = 0. \quad (2)$$

Retranchant (2) de (1) on obtient la propriété énoncée; elle généralise, comme on le voit, le théorème de Möbius.

2° *Un quadrilatère* $A_1A_2A_3A_4$ *est inscrit dans un cercle* O; *soit* O′ *le cercle passant par* A_1A_2 *et tangent au côté* A_1A_4. *Le côté* A_2A_3 *rencontre ce cercle en un second point* I; *démontrer que l'on a*

$$\frac{A_1A_3}{A_2A_4} = \frac{IA_3}{A_1A_4}.$$

En appliquant la relation précédente, on a

$$A_2A_3 . IA_3 \times \text{surf}\, A_1A_2A_4 = \overline{A_1A_4}^2 \times \text{surf}\, A_1A_2A_3. \quad (1)$$

Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ ayant un angle égal sont entre eux comme les côtés qui comprennent cet angle; donc

$$\frac{\text{surf}\, A_1A_2A_3}{\text{surf}\, A_1A_2A_4} = \frac{A_2A_3 . A_1A_3}{A_1A_4 . A_2A_4}.$$

Multipliant les égalités précédentes, membre à membre, on a la relation demandée.

QUESTION 113

Solution par M. P. Giat, élève au Lycée Saint-Louis.

On donne un point fixe O *et deux autres points : l'un,* A *fixe; et l'autre* B, *mobile, mais restant à une distance invariable du*

point O. *On demande le lieu des sommets et des foyers des ellipses qui ont pour centre le point* O *et qui, en outre, sont telles que* A *et* B *soient les extrémités de deux diamètres conjugués.*

(E. V.)

1° *Équation des ellipses.* — La distance du point B au point O étant invariable, nous représenterons les coordonnées de ce point par $r\cos\varphi$ et $r\sin\varphi$, en prenant pour axe des x la droite OA et, pour axe des y, la perpendiculaire à cette droite, menée par le point O. Soit $OA = a$.

L'équation d'une conique ayant pour centre l'origine et passant par le point A est

$$x^2 - a^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0. \qquad (1)$$

OA et OB étant deux diamètres conjugués, on a

$$B \operatorname{tg}\varphi + 1 = 0;$$

d'où, en posant $\operatorname{cotg}\varphi = \lambda$:

$$B = -\lambda.$$

Ensuite, comme le point B est sur la conique, on a

$$r^2\cos^2\varphi - a^2 - 2\lambda r^2\sin\varphi\cos\varphi + Cr^2\sin^2\varphi = 0,$$

d'où
$$C = \frac{a^2(1+\lambda^2) + r^2\lambda^2}{r^2}.$$

En remplaçant B et C par leurs valeurs dans l'égalité (1) on aura l'équation cherchée

$$x^2 - 2\lambda xy + \frac{\lambda^2(a^2+r^2)+a^2}{r^2}y^2 - a^2 = 0. \qquad (2)$$

2° *Lieu des sommets.* — Il suffit, pour avoir le lieu des sommets, d'éliminer λ entre (2) et l'équation des axes de la conique, équation qui est

$$\frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{-\lambda}{1 - \dfrac{\lambda^2(a^2+r^2)+a^2}{r^2}}. \qquad (3)$$

A cet effet, ordonnons ces deux équations par rapport à λ ; nous avons

$$\lambda^2y^2(a^2+r^2) - 2r^2\lambda xy + r^2x^2 + a^2y^2 - a^2r^2 = 0,$$
$$\lambda^2xy(a^2+r^2) - r^2\lambda(x^2-y^2) + xy(a^2-r^2) = 0.$$

Il nous suffit d'écrire que le résultant de ces deux équa-

tions est nul. Nous avons ainsi, après simplifications, l'équation

$$(a^2 + r^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2x^2$$
$$+ (x^2 + y^2)[(x^2 + y^2)(a^2y^2 - r^2x^2) + a^2r^2(x^2 - y^2)] = 0,$$

ou, en développant,

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2(x^2 + y^2)^2 - 2a^2x^2(x^2 + y^2) + a^2x^2(a^2 + r^2) = 0. \quad (4)$$

Nous voyons, sur cette équation, que le lieu est une courbe du sixième degré, symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées et possédant un point double à l'origine; les tangentes en ce point étant confondues et verticales.

Pour construire cette courbe, nous poserons

$$x^2 + y^2 = t^2,$$

ce qui revient à couper par des cercles ayant pour centre l'origine. Nous aurons alors

$$x^2 = \frac{t^4(t^2 - r^2)}{a^2(2t^2 - a^2 - r^2)},$$
$$y^2 = \frac{t^2(t^2 - a^2)(r^2 + a^2 - t^2)}{a^2(2t^2 - a^2 - r^2)}.$$

Les valeurs de x^2 et y^2 doivent d'abord être positives; posons donc :

$$(t^2 - r^2)(2t^2 - a^2 - r^2) > 0,$$

et $$(t^2 - a^2)(r^2 + a^2 - t^2)(2t^2 - a^2 - r^2) > 0.$$

On voit ainsi qu'il n'y aura aucun point de la courbe dans l'espace compris entre les deux cercles

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2 + r^2}{2}$$

ainsi que dans les espaces compris :

1° entre les cercles

$$x^2 + y^2 = a^2,$$
$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + r^2}{2};$$

2° à l'extérieur du cercle

$$x^2 + y^2 = a^2 + r^2.$$

Cela posé, nous distinguerons trois cas :

1er Cas $a > r$. — On en déduit

$$\frac{a^2 + r^2}{2} > r^2 \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + r^2}{2} < a^2.$$

Pour $t^2 = r^2$ $x = 0$ et $y^2 = r^2$;

$t^2 = a^2$ $y = 0$ et $x^2 = a^2$.

Enfin pour $t^2 = a^2 + r^2$, $y = 0$, $x^2 = a^2 + r^2$.

Les tangentes en ces points sont évidemment : pour les deux premiers, parallèles à Ox et, pour les quatre derniers

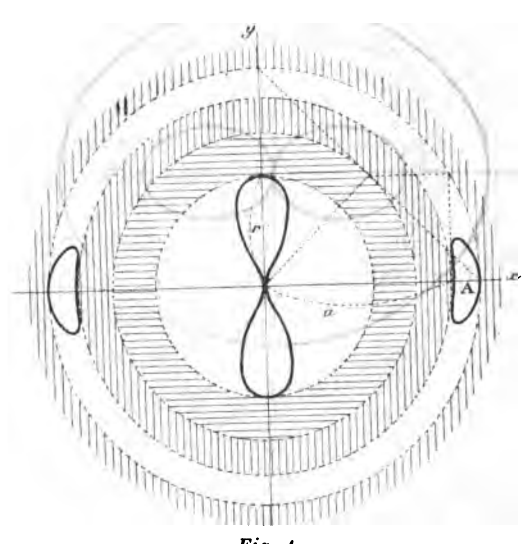


Fig 1.

perpendiculaires à Ox. On peut, avec ces données, construire la courbe; elle a la forme indiquée par la figure (1).

2me Cas. $a = r$. — L'équation (4) devient dans ce cas :

$$(x^2 + y^2 - a^2)[(x^2 + y^2)^2 - 2a^2x^2] = 0.$$

Donc *le lieu se compose de trois cercles ;* l'un, ayant pour centre l'origine, et pour rayon a; les autres, passant par l'origine et ayant pour centres respectifs $\begin{cases} y = 0, \\ x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

3me Cas. $a < r$. — On en déduit $a^2 < \dfrac{a^2 + r^2}{2} < r^2$ et la courbe a dans ce cas la forme (2).

3° Lieu des foyers. — Pour trouver les foyers de la conique (2)

nous allons exprimer que la droite $x - \alpha = i(y - \beta)$ est tangente à cette conique.

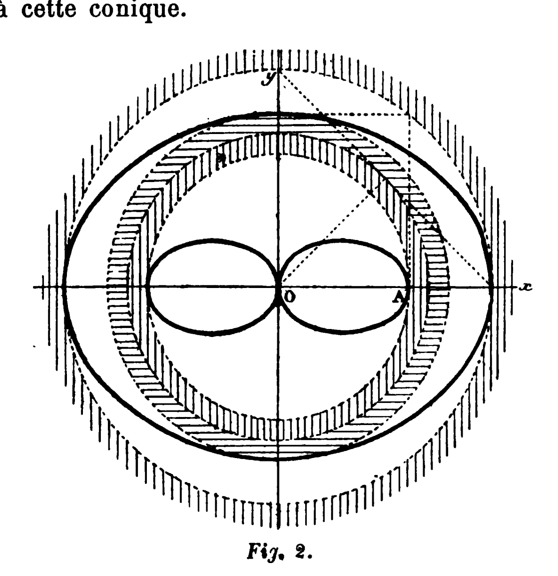


Fig. 2.

L'équation aux ordonnées des points d'intersection de cette droite avec la conique est :

$$(\alpha - i\beta + iy)^2 - 2\lambda y(a - i\beta + iy) + \frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2}y^2 - a = 0$$

ou en ordonnant

$$y^2\left[\frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2} - 1 - 2\lambda i\right] + 2y[i(\alpha - i\beta) - \lambda(\alpha - i\beta)] + (\alpha - i\beta)^2 - a^2 = 0.$$

On a donc, en exprimant que les deux racines de cette équation sont confondues :

$$[i(\alpha - i\beta) - \lambda(\alpha - i\beta)]^2 = [(\alpha - i\beta)^2 - a^2]\left[\frac{\lambda^2(a^2 + r^2) + a^2}{r^2} - 1 - 2\lambda i\right]$$

ou, après simplifications :

$$[\lambda^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2) + (\alpha^2 - \beta^2 - a^2 + r^2)] - 2i[\lambda^2\alpha\beta - r^2\lambda + \alpha\beta] = 0.$$

Par conséquent :

$$\lambda^2(\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2) + (\alpha^2 - \beta^2 - a^2 + r^2) = 0, \quad (5)$$

$$\lambda^2 - \lambda\frac{r^2}{\alpha\beta} + 1 = 0. \quad (6)$$

En éliminant λ entre ces deux équations, nous aurons le lieu des foyers des coniques (2).

Pour faire cette élimination, remplaçons dans l'équation (5) λ^2 par $\lambda \dfrac{r^2}{\alpha\beta} - 1$, nous en déduisons

$$\lambda = - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2}.$$

D'où, en transportant dans l'équation (6) ;

$$\frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2)^2} + \frac{2r^2}{\alpha^2 - \beta^2 - a^2 - r^2} + 1 = 0;$$

ou en simplifiant, et en rendant α, β coordonnées courantes

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - r^4 = 0.$$

En écrivant cette équation sous la forme

$$[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2] = r^4,$$

on voit donc que le lieu cherché est un ovale de Cassini ayant pour foyers le point A et son symétrique par rapport à l'origine O; le produit des distances d'un point de cette courbe aux foyers est égal à r^2.

Dans le cas particulier où $a^2 = r^2$, nous avons la lemniscate de Bernoulli.

Le résultat remarquable auquel conduit la recherche analytique du lieu des foyers peut se prévoir à priori, en observant que le produit des rayons vecteurs joignant un point de l'ellipse aux foyers est égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit au point considéré.

NOTA. — MM. Marchis, élève au lycée de Rouen et Hugon à Poligny ont résolu la même question, mais leurs solutions renferment certaines parties incomplètes.

QUESTION 125

Solution par M. Charles MARTIN, élève au Lycée Louis-le-Grand.

Une parabole de forme invariable glisse entre deux droites rectangulaires. Ox, Oy ; *trouver le lieu décrit par l'extrémité du diamètre qui passe par l'origine. — La courbe est du*

huitième degré ; mais elle peut se mettre, en coordonnées polaires, sous la forme remarquable :

$$\frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega.$$

Déduire, de cette équation, les points d'inflexion que présentent les quatre branches de la courbe.

(G. L.)

Prenons pour axes les droites rectangulaires Ox, Oy, l'équation de la parabole inscrite dans l'angle xOy est :

$$(bx - ay)^2 - ab(2bx + 2ay - ab) = 0 \qquad (1)$$

$bx + ay - ab = 0$ étant l'équation de la corde de contact, calculons le paramètre de cette parabole. Introduisant la longueur λ, il vient :

$$(bx - ay + \lambda)^2 - 2ab[b(1 - \lambda)x + a(1 + \lambda)y] + a^2b^2 - \lambda^2 = 0.$$

Exprimons que les droites :

$$bx - ay + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad 2ab[b(1 - \lambda)x + a(1 + \lambda)y] + \lambda^2 + a^2b^2 = 0$$

sont rectangulaires ; et prenons les pour axes ; on a pour expression du paramètre

$$\frac{2a^2b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} = p.$$

On a donc la condition :

$$4a^4b^4 = p^2(a^2 + b^2)^3 \qquad (2)$$

Le lieu cherché s'obtient en éliminant a et b entre les équations (1), (2) et l'équation

$$bx - ay = 0. \qquad (3)$$

L'élimination donne :

$$b^4x^4y^4 = p^2(x^2 + y^2)^3$$

courbe du huitième degré, formée de quatre branches paraboliques. L'origine est un centre. Passons aux coordonnées polaires, on a :

$$\frac{p}{\rho} = 2 \sin^2 2\omega, \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{\rho} = 1 - \cos 4\omega.$$

Or :

$$p\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 4^2 \cos 4\omega.$$

Donc

$$p\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right] = p[1 + 15 \cos 4\omega] = 0,$$

les points d'inflexion correspondent à :

$$\cos 4\omega = -\frac{1}{15} \qquad \rho = \frac{15}{16}.$$

Nota. — Ont résolu cette question MM. F. Michel (lycée de Montpellier) ; Paul Bourgarel, à Antibes ; A. Bèche, professeur à l'école normale de Tulle; Ferval, élève au lycée Henri IV, classe de M. Macé de Lépinay ; Vacquant, ancien élève de mathématiques spéciales à Lille ; Hugon, à Poligny; Lucien Marchis, à Rouen ; Giat, élève au lycée Saint-Louis, classe de M. Ed. Lucas.

M. Bèche a calculé les angles ω qui correspondent aux points d'inflexion; il donne, pour le premier point, $\omega_1 = 23°\,27'\,20''$; de cette valeur, on déduit évidemment les autres, puisque les branches sont symétriques par rapport aux axes et par rapport à leurs bissectrices.

QUESTIONS 169, 170 ET 171

Solution par E. Lemoine, ancien élève de l'École polytechnique.

---

169. — *On considère une parabole* P *inscrite aux points* A *et* B *dans l'angle* ACB, *si l'on désigne par* M *un point mobile sur* P *on a constamment :* $\overline{MBA}^2 = 4MCB \times MCA$.

170. — *Soit* BC *un diamètre d'une ellipse* E *; on considère l'extrémité* A *d'un demi-diamètre conjugué de* BC, *puis on prend sur* E *(explicitement sur l'arc* AC *pour éviter toute ambiguïté sur les signes) un point* M *; démontrer que l'on a constamment :*

$$\frac{1}{MAC} - \frac{1}{MAB} = \frac{2}{MBC}.$$

171. — *Soit* BC *un diamètre fixe dans une hyperbole donnée* H *; par les extrémités* B *et* C *on mène des parallèles aux asymptotes, parallèles qui se coupent en* A.

Démontrer que si M *est un point mobile sur* H, *le rapport* $\dfrac{MAB.MAC}{MBC}$ *a une valeur constante.*

169. — Appelons α, β, γ les distances du point M respectivement à BC, AC, AB et appelons a, b, c les longueurs respectivement de BC, AC, AB.

L'équation en coordonnées homogènes de la parabole tangente à CD en B et à CA en A est (ABC étant le triangle de référence),

$$c^2\gamma^2 = 4ab\alpha\beta$$

ou

$$\left(\frac{1}{4} c\gamma\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2} a\alpha\right)\left(\frac{1}{2} b\beta\right),$$

d'où l'on conclut :

$$\overline{MBA}^2 = 4MCB \times MCA;$$

et 169 est démontré.

Les trois paraboles qui touchent deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième ont des propriétés remarquables déjà étudiées par MM. Artzt, Brocard, E. Lemoine, etc.

170. — L'équation de l'ellipse E circonscrite à ABC et telle que la médiane partant de A soit le diamètre conjugué du diamètre CB est :

$$\frac{2}{a\alpha} + \frac{1}{b\beta} + \frac{1}{c\gamma} = 0,$$

ou, si α, β, γ sont les distances de M, point de l'ellipse, aux trois côtés

$$\frac{2}{2MBC} + \frac{1}{2MAC} - \frac{1}{2MAB} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{MAC} - \frac{1}{MAB} = \frac{2}{MBC};$$

et 170 est démontré.

171. — H a pour équation (ABC étant encore le triangle de référence)

$$a^2\alpha^2 + ab\alpha\beta + ac\alpha\gamma + 2bc\beta\gamma = 0.$$

d'où

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \frac{2bc\beta\gamma}{a\alpha} = 0,$$

d'où

$$2S + \frac{4\left(\frac{b\beta}{2}\right)\left(\frac{c\gamma}{2}\right)}{\left(\frac{a\alpha}{2}\right)},$$

en appelant S l'aire de ABC; d'où

$$\frac{S}{2} = \frac{MAC.MAB}{MBC},$$

et 171 est démontré.

Remarques. — *a*) Les trois paraboles P relatives au triangle ABD se coupent deux à deux sur les médianes à l'intérieur du triangle, elles divisent ces médianes dans le rapport de 1 à 8.

b) Les trois ellipses E, relatives au triangle ABD, se coupent deux à deux sur les médianes à l'extérieur du triangle, elles divisent ces médianes dans le rapport de 1 à 2.

c) Les trois hyperboles H relatives au triangle ABC se coupent, deux à deux, sur les médianes à l'extérieur du triangle, elles divisent les médianes dans le rapport de 1 à 3.

Nota. — Ont résolu ces questions : MM. J. Berthon (lycée de Lyon) A. Levy (lycée de Nancy, classe de M. Hervieux); Roux (lycée de Grenoble); Georges Naudin (lycée d'Angoulême); J. Noulet (collège de Manosque).

QUESTION PROPOSÉE

232. — Les cercles tangents à l'axe non transverse d'une hyperbole équilatère, qui ont leur centre sur cette courbe, découpent sur l'axe transverse des segments égaux.

(d'Ocagne.)

ERRATUM

Page 208, ligne 7 :

Au lieu de :	*Lisez :*
égale à 1	plus grand que 1.

Le Directeur Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19602-7.

Nous avons eu la douleur d'apprendre, depuis la publication du dernier numéro, la mort de M. J. Bourget qui créa en 1877 le Journal de Mathématiques Élémentaires. La vie administrative, très occupée, que menait M. Bourget, ne lui a pas permis, depuis 1878, de prendre, à sa rédaction, une part active; néanmoins, il s'y intéressait toujours très vivement.

Nos lecteurs trouveront, à la première page du numéro de novembre du Journal de Mathématiques Élémentaires, quelques lignes que M. L. Lévy a consacrées au souvenir du fondateur de ce Journal. Une notice plus complète, rappelant les titres scientifiques de M. J. Bourget, sera publiée prochainement.

G. L.

CONDITION POUR QU'UN POINT SOIT EXTÉRIEUR A UNE CONIQUE

Par M. **Étienne Pomey.**

Définition. — *Un point* P *est extérieur à une conique, lorsque les tangentes issues de ce point sont réelles et distinctes.*

Soient x et y les coordonnées du point P, par rapport à des axes faisant un angle θ, et

$$f(X, Y) \equiv AX^2 + 2B''XY + A'Y^2 + 2B'X + 2BY + A''$$

le premier membre de l'équation de la conique. Nous poserons

$$\varphi(X, Y) \equiv AX^2 + 2B''XY + A'Y^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & f'_x \\ B'' & A' & f'_y \\ f'_x & f'_y & f(x, y) \end{vmatrix}$$

$$H = A + A' - 2B''\cos\theta.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point soit extérieur à une conique, peut s'établir de bien des façons

diverses; nous résumons, dans cette Note, celles qui nous paraissent les plus simples.

Nous donnons d'abord cinq démonstrations, dans lesquelles on n'a pas besoin de préciser le genre de la conique.

Première Démonstration. — En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, au point P, on a

$$f(X, Y) \equiv \varphi(x, y) + x'f'_x + y'f'_y + f(x, y). \qquad (1)$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues de P est

$$4f(x, y)\varphi(1, m) - (f'_x + mf'_y)^2 = . \qquad (2)$$

Pour que ces tangentes soient réelles et distinctes, il faut et il suffit que l'on ait

$$[A'f(x, y) - f'^2_y][Af(x, y) - f'^2_x] - [B'f(x, y) - f'_x f'_y]^2 < 0,$$

ou

$$f(x, y)\Delta_1 < 0.$$

Or, en retranchant, à la troisième colonne de Δ_1, la somme des deux premières multipliées respectivement par x et y, puis faisant la même opération sur les lignes, on voit que Δ_1 se réduit à Δ; c'est ce que l'on constate encore en appliquant à (1) l'invariant $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$. La condition devient donc

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Deuxième Démonstration. — L'équation quadratique des tangentes, issues de P, à la conique, est

$$4f(x, y, z)\, f(X, Y, Z) - (Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z)^2 = 0.$$

Les directions asymptotiques du faisceau sont représentées par

$$4f(x, y)\, \varphi(X, Y) - (Xf'_x + Yf'_y)^2 = 0,$$

équation qui se confond avec (2), si l'on y remplace X par 1 et Y par m, et d'où l'on déduit, par conséquent,

$$f(x, y)\,\Delta < 0.$$

Troisième Démonstration. — Pour que les tangentes issues de P soient réelles et distinctes, il faut et il suffit que la corde des contacts, c'est-à-dire la polaire de P, représentée par

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0 \qquad (3)$$

coupe la conique en des des points réels et distincts, ce qui

donne aisément

$$U \equiv (B^2 - A'A'')f_x'^2 + (B'^2 - A''A)f_y'^2 + (B''^2 - AA')f_z'^2 + 2(AB - B'B'')f_y' f_z' + 2(A'B' - B''B)f_z' f_x' + 2(A''B'' - BB')f_x' f_z' > 0.$$

La condition de contact de la droite (3) et de la conique serait $U = 0$; mais, d'autre part, cette condition est, comme on sait, $D = 0$ en posant

$$D = \begin{vmatrix} & & & f_x' \\ & \Delta & & f_y' \\ & & & f_z' \\ f_x' & f_y' & f_z' & 0 \end{vmatrix}.$$

On est donc conduit à comparer U à D; de ce rapprochement résulte leur identité. Or, en retranchant de la dernière colonne de D la somme des trois premières multipliées respectivement par $2x$, $2y$, $2z$, et en tenant compte du théorème d'Euler, on a

$$\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & \Delta & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4f(x, y) \end{vmatrix} = -4f(x, y)\Delta.$$

La condition est donc enfin $f(x, y)\Delta < 0$.

Quatrième Démonstration. — Le point P devant être, par rapport à la courbe, dans la même région qu'un point quelconque (a, b) d'une tangente quelconque, on doit avoir

$$f(x, y)f(a, b) > 0. \qquad (4)$$

Mais, en prenant pour nouvel axe des y cette tangente et pour nouvel axe des x le diamètre qui passe par le point de contact, on peut trouver des nombres réels λ, p, q satisfaisant à l'identité

$$\lambda f(X, Y) \equiv y'^2 - 2px' - qx'^2. \qquad (5)$$

L'abcisse du point (a, b), dans le nouveau système, étant nulle, on a

$$\lambda f(a, b) > 0; \qquad (6)$$

puis en appliquant à (5) l'invariant $\frac{\Delta}{\sin^2 \theta'}$, on a

$$\frac{\lambda^3\Delta}{\sin^2 \theta} = \frac{-p^2}{\sin^2 \theta'}.$$

Alors, en vertu de (6) et (7), la condition (4) devient

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

CINQUIÈME DÉMONSTRATION. — Les tangentes issues d'un foyer (α, β) étant imaginaires, il faut et il suffit que le point P soit dans la région différente de ce point par rapport à la conique, c'est-à-dire qu'on ait

$$f(x, y)f(\alpha, \beta) < 0. \qquad (8)$$

Or, on peut trouver un nombre λ tel qu'on ait

$$\lambda f(X, Y) \equiv (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 \qquad (9)$$
$$+ 2(X - \alpha)(Y - \beta)\cos\theta - (mX + nY + h)^2;$$

ce qui, en désignant par d la quantité différente de zéro $m\alpha + n\beta + h$, donne

$$\lambda f(\alpha, \beta) \equiv - d^2. \qquad (10)$$

Puis, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au foyer, on a

$$\lambda f(X, Y) \equiv x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos\theta - (mx' + ny' + d)^2.$$

Appliquant à cette identité l'invariant $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$, on a

$$\lambda^3\Delta = \begin{vmatrix} 1 - m^2 & \cos\theta - mn & - md \\ \cos\theta - mn & 1 - n^2 & - nd \\ - md & - nd & - d^2 \end{vmatrix} = - d^2\sin^2\theta \quad (11)$$

Donc, en vertu de (10) et (11), la condition (8) devient

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

— Dans les démonstrations qui suivent, on examine séparément le cas de la parabole et celui des coniques à centre.

SIXIÈME DÉMONSTRATION. — La polaire du centre (a, b) d'une conique à centre, étant la droite de l'infini, rencontre la conique en des points imaginaires ou réels, suivant qu'elle est une ellipse ou une hyperbole. Il faut donc que le point $P(x, y)$ ne soit pas dans la région du centre (ou au contraire qu'il y soit placé), c'est-à-dire que $f(x, y)f(a, b)$ soit négatif (ou positif), suivant que la conique est une ellipse ou une hyperbole. Or $f(a, b) = \frac{\Delta}{\delta}$; d'ailleurs δ est positif dans le premier cas, négatif dans le second; donc, dans les deux cas, la condition est

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Lorsque la conique est une parabole, on peut poser

$$f(X, Y) \equiv \varepsilon(mX + nY)^2 + 2B'X + 2BY + A'',$$

l'un des coefficients de X^2 et Y^2 n'étant pas nul, et ε désignant l'unité précédée du signe de ce coefficient. Le point P doit être dans la même région, par rapport à la courbe, qu'un point quelconque (a, b) de la tangente $2B'X + 2BY + A'' = 0$, différent de son intersection avec le diamètre $mX + nY = 0$. Il faut donc et il suffit qu'on ait

$$f(x, y)f(a, b) > 0.$$

Or, on a

$$f(a, b) = \varepsilon(ma + nb)^2, \qquad \Delta = -\varepsilon(B'n - Bm)^2.$$

La condition est donc

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Septième Démonstration. — Pour une conique à centre, on est conduit, par deux transformations successives de coordonnées, à la forme réduite, conformément à la double identité

$$\Delta f(X, Y) \equiv \Delta\left(Ax'^2 + 2B''x'y' + A'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta}\right)$$

$$\equiv -\frac{\Delta^2}{\delta}(Mx''^2 + Ny''^2 - 1).$$

Les coordonnées du point P, dans le dernier système, doivent rendre le dernier membre négatif; ses coordonnées, dans le premier système, doivent donc satisfaire à

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

De même, pour une parabole, deux transformations successives de coordonnées conduisent à

$$Hf(X, Y) \equiv H(Hy'^2 + 2lx' + 2my' + n) \equiv H^2(y''^2 - 2px''),$$

avec

$$p = \sin^2\theta . \sqrt{-\frac{\Delta}{H^3}}. \qquad (12)$$

Les coordonnées finales de P, devant rendre positif le dernier membre de l'identité, ses coordonnées initiales doivent satisfaire à $Hf(x, y) > 0$, ou, d'après (12), à $f(x, y)\Delta < 0$.

Huitième Démonstration. — Par une transformation convenable des coordonnées, on a

$$f(X, Y) \equiv \lambda(Mx''^2 + Ny''^2 - 1) \qquad (13)$$

pour l'ellipse et l'hyperbole;

$$f(X, Y) \equiv \mu(y''^2 - 2px'') \qquad (14)$$

pour la parabole.

En appliquant, respectivement à (13) et (14), les invariants $\frac{\Delta}{\delta}$ et $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$, on a

$$\frac{\Delta}{\delta} = -\lambda, \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta} = -\mu^2 p^2.$$

En conséquence, (13) et (14) donnent,

$$f(X, Y)\Delta \equiv -\frac{\Delta^2}{\delta^2}(Mx'^2 + Ny'^2 - 1),$$

$$f(X, Y)\Delta \equiv -\frac{\Delta^2}{\mu^2 p^2 \sin^2\theta}(y'^2 - 2px').$$

D'où l'on conclut encore, pour le point P,

$$f(x, y)\Delta < 0.$$

Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le point* P *soit extérieur à l'ellipse est* $Af(x, y) > 0$*; il en est de même pour la parabole, à moins que* A *ne soit nul, auquel cas la condition est* $A'f(x, y) > 0$.

1° Il suffit évidemment, d'après le théorème I, de démontrer, pour l'ellipse et la parabole, qu'on a $A\Delta < 0$, ou, si A est nul, $A'\Delta < 0$. Or, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, au centre de l'ellipse, on a

$$f(X, Y) \equiv Ax'^2 + 2B''x'y' + A'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta};$$

ce qui montre que le carré du demi-diamètre parallèle à ox' est $-\frac{A}{\Delta\delta}$; on a donc $A\Delta < 0$.

Dans le cas de la parabole,

$$f(X, Y) \equiv \varepsilon(mX + nY)^2 + 2B'X - 2BY + A'',$$

ε ayant le signe de A, ou, si A est nul, celui de A', et l'on a

$$\Delta = -\varepsilon(B'n - Bm)^2.$$

2° On peut aussi diriger les 4me, 5me et 8me démonstrations du théorème I, de façon à obtenir le théorème II, sans introduire la considération de Δ. En effet, puisque δ est $\geqslant 0$, on a

$$AH = (A - B''\cos\theta)^2 + B''^2\sin^2\theta + \delta > 0, \qquad (15)$$

ou, si A est nul, $$H = A'. \qquad (15\ bis)$$

Alors, appliquant à (5) l'invariant $\frac{H}{\sin^2\theta}$, on trouve

$$\frac{\lambda H}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta'}. \qquad (16)$$

Donc, d'après (6), (15), ou (15)' et (16), la condition (4) devient

$$Af(x, y) > o;$$

ou, si A est nul, $A'f(x, y) > o.$

De même, de (9), on déduit identiquement

$$\lambda H = \sin^2 \theta + \delta\lambda^2 > o,$$

inégalité qui, jointe à (15) ou (15') et à (16), transforme (8) et donne

$$Af(x, y) > o,$$

ou $A'f(x, y) > o.$

Dans la huitième démonstration, on applique à (13) et à (14) l'invariant $\frac{H}{\sin^2 \theta}$, et l'on a

$$\frac{H}{\sin^2 \theta} = \lambda(M + N), \qquad (18)$$

avec $M + N > o$ pour l'ellipse,

$$\frac{H}{\sin^2 \theta} = \mu \qquad (19)$$

pour la parabole.

Les conditions $\lambda f(x,y) > o.$

et $\mu f(x, y) > o$

donnent donc, en vertu de (15) ou (15)', (18) et (19),

$$Af(x, y) > o,$$

ou $A'f(x, y) > o.$

Remarque. — On doit encore observer que, pour la parabole, la sixième démonstration du théorème I a d'abord fourni la condition simplifiée, et que la septième a d'abord donné

$$Hf(x, y) > o,$$

qu'il suffit de combiner avec (15) ou (15 *bis*).

3° Enfin, nous allons donner du théorème actuel deux démonstrations directes, complètement indépendantes de tout ce qui précède.

Dans le cas de l'ellipse, tout point extérieur P est dans la même région que le point à l'infini sur ox; ce dernier point donnant à $f(x, y)$ le signe de A, il faut donc qu'on ait

$$Af(x, y) > o.$$

Ce raisonnement subsiste pour la parabole, si A n'est pas nul, car alors ox n'étant point parallèle à l'axe, son point à l'infini est extérieur à la courbe; si A est nul, le raisonnement

s'applique à oy et donne

$$A'f(x, y) > o.$$

On peut aussi mener, par P, une sécante correspondant aux équations $X = x + a\rho$, $Y = y + b\rho$ coupant la conique en A et B; les segments PA, PB sont les racines de l'équation

$$\varphi(a, b)\rho^2 + \ldots . + f(x, y) = o,$$

et, comme elles doivent avoir le même signe, il faut qu'on ait

$$\varphi(a, b)f(x, y) > o.$$

Or, on a $\quad A\varphi(a,b) \equiv (Aa + B''b) + \delta b^2 > o$

puisque $\delta \geqslant o$; ou, si A est nul,

$$\varphi(a, b) = A'b^2.$$

On a donc $\quad Af(x, y) > o,$

ou $\quad A'f(x, y) > o.$

Remarque. — Cette dernière démonstration prouve que si $f(x, y) = o$ représente deux droites parallèles, la condition nécessaire et suffisante pour que P ne soit pas entre ces droites est $\quad Af(x, y) > o;$

ou, si A est nul, $\quad A'f(x, y) > o.$

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

(ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET TERMINOLOGIQUE)

Par M. **Émile Vigarié**.

(*Suite*, voir p. 217).

---

38. Transformation homographique instantanée. — Imaginons un triangle de référence ABC et trois nombres quelconques λ, μ, ν. Il existe dans le plan du triangle un point M dont les *coordonnées normales* (x, y, z) sont proportionnelles à λ, μ, ν; et l'on peut aussi trouver un point M' dont les *coordonnées barycentriques* (α, β, γ) sont elles-mêmes proportionnelles à λ, μ, ν. Ces deux points M, M', ainsi associés, se correspondent homographiquement, et si l'un d'eux

(*) G. de Longchamps. *Une conique remarquable du triangle.* (A.-F Nancy, 1886.)

décrit la courbe U représentée par

$$f(x, y, z) = 0,$$

le correspondant M′ décrit une courbe U′ :

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

C'est pour rappeler que les équations des deux courbes correspondantes s'obtiennent ainsi par le seul changement des lettres qui représentent les variables, que M. de Longchamps a proposé de donner à cette méthode de transformation, imaginée par lui, le nom de *transformation instantanée.*

39. Points équicoordonnés. — Nous appellerons ainsi et nous désignerons par les lettres M_x, M_a, deux points dont les coordonnées normales de l'un sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques de l'autre.

40. Transformation complémentaire dans un système quelconque de coordonnées. — Cette transformation repose sur l'idée des points complémentaires dont nous avons parlé précédemment (§§ 18-20). A la courbe dont l'équation est

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

correspond, par points complémentaires, la courbe :

$$f(\eta + \zeta - \xi,\ \zeta + \xi - \eta,\ \xi + \eta - \zeta) = 0$$

41. Transformation anticomplémentaire dans un système quelconque de coordonnées. — A la courbe

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

correspond, par points anticomplémentaires, dans le système de coordonnées considéré, la courbe

$$f(\eta + \xi, \zeta + \eta,\ \xi + \zeta) = 0$$

42. Transformations supplémentaires et antisupplémentaires. — Quand on adopte les coordonnées normales, à la courbe

$$f(x, y, z) = 0$$

correspondent, par points supplémentaires et antisupplémentaires, les deux courbes :

$$f(y + z - x,\ \ z + x - y,\ \ x + y - z) = 0,$$
$$f(y + z,\ \ z + x,\ \ x + y) = 0.$$

42. Transformations complémentaires et anticomplémentaires. — Dans le système de coordonnées normales, à la courbe

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

correspondent les deux courbes

$$f(\beta + \gamma - \alpha, \quad \gamma + \alpha - \beta, \quad \alpha + \beta - \gamma) = 0$$
$$f(\beta + \gamma, \quad \gamma + \alpha, \quad \alpha + \beta) = 0.$$

44. Points tripolairement associés. — Les coordonnées tripolaires (λ, μ, ν) d'un point M sont :

$$\overline{MA}^2 = \lambda, \qquad \overline{MB}^2 = \mu, \qquad \overline{MC}^2 = \nu,$$

ABC étant le triangle de référence.

Il existe toujours deux points M, M' dont les coordonnées tripolaires sont proportionnelles à trois quantités données. Ces points sont en ligne droite avec le centre O du cercle circonscrit au triangle de référence et sont conjugués harmoniques par rapport à ce cercle. La perpendiculaire au milieu de MM' a pour équation :

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0 \ (*).$$

QUESTIONS ÉNONCÉES

SÉRIES

1. — La série

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{n^{n+1}} + \ldots$$

est convergente; calculer sa valeur, à $\frac{1}{1000}$ près.

Voyez les développements qui accompagnent une question analogue (n° d'octobre p. 226).

2. — Démontrer que la série

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots$$

(*) Ici, se termine la première partie du travail de M. Vigarié; nous commencerons la publication de la seconde partie, qui traitera d'abord des *points remarquables du triangle*, dans le numéro de janvier prochain.

est convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_1^\infty \varphi(x)dx$$

est finie ou infinie. On suppose que la fonction φ est indéfiniment décroissante et qu'elle peut devenir aussi petite que l'on veut.

Ce théorème est démontré (*Journal*, 1887, p. 19).

3. — Discuter la convergence de la série

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+4}+\ldots+\frac{1}{a^2+n^2}+\ldots$$

Série convergente, puisque $Lim.\, n^2u_n = \frac{1}{a^2}$.

On peut aussi la comparer à la série dont le terme général est $\frac{1}{n^2}$. Si l'on change a^2, en $-a^2$, la première démonstration subsiste; l'autre, peut aussi être employée; mais il faut comparer les termes $\frac{1}{n^2-a^2}$ et $\frac{1}{(n-1)^2}$.

4. — Calculer, à $\frac{1}{100}$ près, la valeur de la série suivante

$$y = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots+\frac{1}{5.9\ldots n}+\ldots$$

Dans cet exemple, au lieu de suivre la méthode générale, rappelée plus haut, on peut observer que l'on a

$$\frac{y}{1.2.3.4} = e - \frac{8}{3}.$$

Dans cette égalité, la lettre e désigne un nombre connu avec une approximation aussi grande que l'on veut

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

5. — La série

$$y = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \qquad (1)$$

est-elle convergente ou divergente?

Cette série, très connue (*), est sommatoire. On multiplie les deux membres de l'égalité (1) par x et l'on retranche, de celle-ci, la nouvelle égalité ainsi obtenue, etc.

6. — Étudier la série alternée

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}+\ldots$$

(*) Voyez : *Nouvelles Annales*, 1849, p. 421.

Cette série est convergente; on le prouve en l'écrivant sous la forme

$$4\left\{\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2.6}+\ldots+\frac{1}{n(n+4)}+\ldots\right\}$$

et en observant que le terme général de la série placée dans la parenthèse donne *lim.* $n^2u_n = 1$. On peut aussi établir cette convergence par la sommation des n premiers termes.

EXERCICES ÉCRITS

4. On considère une parabole P rapportée à ses axes; par un point donné M (x_0, y_0) et par le sommet O de la parabole on fait passer une circonférence mobile Γ, qui rencontre P en trois autres points A, B, C.

Les normales à P, en ces points A, B, C se coupent en un certain point I.

Imaginant toutes les circonférences telles que Γ, on demande :

1° Quel est le lieu du point I? Ce lieu est une droite Δ;

2° Trouver l'enveloppe de Δ, lorsque M décrit une circonférence de centre O.

3° Quel est le lieu des points M pour lesquels Δ est tangente a P?

4° Si l'on considère deux des trois points A, B, C, dont il a été question, les tangentes, en ces points, à la parabole P, se coupent en un point J; le lieu de J est une conique U.

5° Trouver le lieu du point M lorsque la conique U, qui correspond à ce point, est tangente à P.

Ce lieu se compose d'un certain cercle et de la parabole proposée.

Notes sur l'exercice 3.

1° En partant de l'identité

$$\left(A\frac{x}{a}+B\frac{y}{b}-1\right)\left(A\frac{x}{a}-B\frac{y}{b}-\lambda\right)+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$
$$\equiv \mu(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y)$$

on trouve

$$(A^2+B^2)(x^2+y^2)-A\frac{x}{a}(A^2b^2+B^2a^2+c^2) \qquad (1)$$
$$-B\frac{y}{b}(A^2b^2+B^2a^2-c^2)=0.$$

2° On suppose $A^2 + B^2 = 1.$ (2)

3° La parallèle à Oy, menée par M, a pour équation (3) $x = aA$; en éliminant A, B entre (1), (2) et (3) on trouve

$$y^4 - y^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(b^2 + \frac{c^4x^4}{a^4b^2}\right) + \frac{c^4x^4}{a^4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 0.$$

Mais l'ellipse proposée fait partie du lieu; on supprime ce facteur singulier et l'on a finalement

$$y^2 = \frac{c^4x^4}{a^4b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \text{ etc...}$$

4° Le lieu demandé est, pour des raisons évidentes, une courbe unicursale; en traitant directement la question, on trouve

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = -\frac{e^2}{b}\sin\varphi\cos^2\varphi$$

On peut, dans ces formules, faire varier φ et construire la courbe point par point. On peut aussi, si l'on préfère, y remplacer les fonctions trigonométriques par des formules algébriques, au moyen des égalités connues :

$$\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Remarque. — On aurait pu demander aussi le lieu des centres des cercles C, mais ce problème est connu, ou du moins il revient immédiatement au problème de Tortolini (*) qui s'énonce ainsi : *trouver l'enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des diamètres de l'ellipse.* Cette courbe jouit d'une propriété remarquable signalée par Legendre; *la longueur de ses arcs s'exprime au moyen d'une expression algébrique et d'une fonction elliptique.*

C'est une unicursale dont les coordonnées vérifient les équations

$$\frac{ax}{\cos\varphi} = a^2 + c^2\sin^2\varphi,$$

$$\frac{by}{\sin\varphi} = b^2 - c^2\cos^2\varphi$$

Ces formules permettent de discuter la forme générale de la courbe correspondante; on devra distinguer trois cas suivant que l'on a $b > c$, $b = c$, ou enfin $b < c$.

QUESTIONS D'EXAMEN

23. — *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$\rho = \operatorname{tg}\omega.$$

Cette courbe Γ est formée de deux branches hyperboliques aplaties, présentant, à l'origine, un point d'osculation; sa construction, points par points, n'offre aucune difficulté,

(*) *Nouvelles Annales* 1846, p. 365.

mais son tracé, tangente par tangente, est un peu plus intéressant.

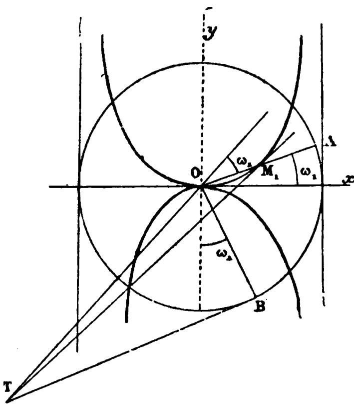


Fig. 1.

Soient ρ_1, ω_1, les coordonnées d'un point M_1 pris sur F; la tangente en ce point a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \cot g\, \omega_1 \cos(\omega - \omega_1) - \frac{1}{\sin^2 \omega_1} \sin(\omega - \omega_1). \quad (1)$$

Remplaçons; dans cette équation, ω par $2\omega_1$; nous trouvons, pour la valeur correspondante de ρ,

$$\rho \sin \omega_1 + 1 = 0.$$

D'après cette relation, on déduit, pour la tangente en M_1, une construction très simple, indiquée sur la figure (1).

La construction de la tangente en un point pris sur une courbe est un problème toujours possible, que l'on peut résoudre avec la règle et le compas (exception faite des point smultiples dont l'ordre est supérieur à 2), et même d'une infinité de façons différentes. On peut dire que le sujet est inépuisable (*); il s'agit seulement d'en trouver une solution simple.

Pour montrer, sur l'exemple qui nous occupe, une application de cette idée générale, proposons-nous de déterminer le point de rencontre θ de la tangente cherchée M_1T, avec la tangente au cercle Δ (cercle décrit, de l'origine comme centre, avec l'unité pour rayon), au point A, extrémité du rayon qui joint le point O au point M_1. La tangente à Δ, au

(*) Voyez, par exemple, à propos de la variété que nous signalons ici, la question 233 proposée dans le présent numéro. Voici encore une construction très simple, que le lecteur vérifiera sans peine.

Soient O le sommet de la courbe Γ, OZ son axe, M un point de T; la perpendiculaire MA à OM rencontre OZ en A; si, en ce point A, on trace une droite AB perpendiculaire à OZ, AB rencontre la perpendiculaire élevée en O à OM, en un certain point C; CM est la normale, en M, à Γ.

point A, a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \cos(\omega_1 - \omega). \qquad (2)$$

Entre (1) et (2), éliminons $\cos(\omega_1 - \omega)$, nous avons

$$\frac{1}{\rho}(\operatorname{cotg}\omega_1 - 1) = \frac{\sin(\omega - \omega_1)}{\sin^2\omega_1}$$

ou, en coordonnées cartésiennes

$$\sin\omega_1(\cos\omega_1 - \sin\omega_1)$$
$$= y\cos\omega_1 - x\sin\omega_1.$$

Cette équation représente une droite qui passe par le point de concours θ des tangentes $A\theta$, $M_1\theta$; on voit aussi qu'elle est parallèle à OM_1; enfin, l'équation est vérifiée par $y = x = \sin\omega_1$. De là résulte une construction de la tangente, indiquée sur la figure (2). OC est la bissectrice de yox, AB est perpendiculaire sur oy et $C\theta$ est parallèle à OA.

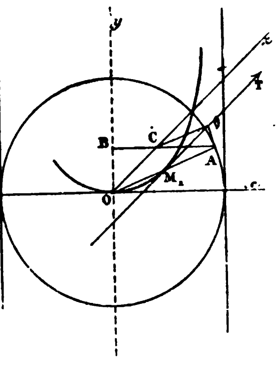


Fig. 2.

24. — *Equation générale des coniques osculatrices à une parabole donnée.*

Pour qu'une conique soit osculatrice à une autre conique, il faut que ces deux courbes aient tous leurs points communs confondus.

L'équation générale demandée est d'après cela,

$$\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right)^2 + \lambda(y^2 - 2px) = 0,$$

en supposant, bien entendu, que la parabole proposée soit rapportée à son axe.

Comme exercice, on peut, par exemple, se proposer de trouver *le lieu des centres des coniques osculatrices à une parabole donnée et tangentes à l'axe de cette courbe.*

On trouve alors $\lambda = 1$; puis, en éliminant m entre les équations :

$$m\left(y - mx - \frac{p}{2m}\right) + p = 0,$$

$$y - mx - \frac{p}{2m} + y = 0,$$

on trouve, pour l'équation du lieu cherché,

$$y^2 = \frac{2}{3} px.$$

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu, de M. Griess, la lettre suivante :

« Je vous remercie d'avoir bien voulu publier ma petite Note dans votre numéro de juillet dernier.

En réponse à l'observation de M. Catalan, voici une démonstration fort simple du théorème que j'ai énoncé.

Considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy.

Prenons, sur Ox, une longueur $OA = 1$, et divisons-la en n parties égales. Par les points de division $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$, élevons des ordonnées égales à $\left(\frac{1}{n}\right)^p$, $\left(\frac{2}{n}\right)^p \cdots$ et considérons la somme des rectangles ayant pour bases les divisions de OA et pour hauteurs ces ordonnées. Elle a pour mesure

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] = \frac{S_p}{n^{p+1}}.$$

En observant que $OA_1 = \frac{1}{n}$, $OA_2 = \frac{2}{n}$, $OA_{n-1} = \frac{n-1}{n}$ les extrémités des ordonnées A_1B_1, A_2B_2 se trouvent sur la courbe dont l'équation est

$$y = x^p.$$

Quand on fait croître n indéfiniment, la somme des rectangles a pour limite l'aire comprise entre la courbe, les ordonnées des points O et A, et l'axe des x, Cette aire a pour expression

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

Donc $$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Cette démonstration suppose que la limite existe; il faut et il suffit, pour cela, que l'intégrale

$$\int_0^1 x^p dx$$

ne soit pas infinie.

Cette condition est réalisée tant que p est positif

Quand p est < 0, posons $p = -q$; l'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}.$$

$\frac{1}{x^q}$ devenant infini à la limite inférieure, on reconnaît les cas où l'intégrale a une limite au moyen d'un théorème démontré dans tous les cours de calcul intégral (v. Serret, *Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 238). Il montre que l'intégrale a une limite, tant que l'on a

$$q < 1 \qquad \text{ou} \qquad p >= 1,$$

et qu'elle est infinie si $q \overset{=}{>} 1$.

Donc $$\lim \frac{S_p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

tant que $$p + 1 > 0.$$

M. Appell a montré (*Nouvelles Annales*, juillet 1887, p. 312) comment on peut former un polynôme entier $\varphi_p(x)$, qui pour des valeurs entières attribuées à p et x représente la somme, des p^{mes} puissances des n premiers nombres entiers. Il trouve que ce polynôme est de degré $p + 1$, et que le coefficient du premier terme est $\frac{1}{p+1}$; savoir :

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Ax^p + \ldots$$

Il en résulte, pour x entier et infiniment croissant,

$$\lim \frac{\varphi_p(x)}{x^{p+1}} = \lim \frac{S_p}{x^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

ce qui démontre simplement le théorème, dans le cas des exposants entiers.

Cette propriété des polynômes de Bernoulli est, bien entendu, très connue, et depuis longtemps. G. L.

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

... Voici quelques observations relatives au n° de septembre.

1° La série

$$\frac{1}{2L2}+\frac{1}{3L3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)L(n+1)}+\ldots$$

n'est pas la *série de M. Bertrand :* elle remonte, au moins, à l'illustre Abel (œuvres, 1re édition, tome Ier, p. 111).

2° La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots$$

pourrait (s'il était besoin) s'appeler *série de Catalan.* En effet, elle justifie cette remarque, dont je crois avoir la priorité : *Une série à termes alternativement positifs et négatifs, dont le terme général a pour limite zéro, peut être divergente* (Traité élémentaire des séries, p. 29).

Nota. — J'ai, en effet (*Journal,* 1886, p. 164), nommé *série de M. Bertrand,* la série (1) ; parce que, comme je l'ai rappelé *(loc. cit.)*, elle a été, autrefois (*Journal de Liouville,* 1842), étudiée par ce Géomètre. Il n'y a pas, je pense, grand mal à cela. M. Catalan me fait observer, avec raison, que, dès 1827, Abel avait établi la divergence de cette série; il serait donc plus juste de la nommer *série d'Abel,* s'il n'y avait déjà une autre série (Bertrand, *Calcul différentiel,* p. 324), ainsi désignée. Dans ces conditions, il vaudrait mieux lui donner une épithète justifiée par une de ses propriétés. Mon cher maître en propose-t-il une ?

D'après un renseignement que je dois à l'obligeance de M. Catalan, à propos de la question historique, ici soulevée, en 1827, L. Olivier avait énoncé cette règle fausse :

La série

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

est convergente si

$$\lim nu_n=0.$$

C'est alors qu'Abel, prenant pour exemple la série (1), a rédigé sa Note rectificative.

Pour ce qui concerne la série (2), M. Catalan a raison de croire que cette question a été posée pour constater que le candidat était au courant de la remarque rappelée ci-des-

sus (*). Voici, en effet, dans quels termes elle a été formulée :

La série

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \dots$$

est-elle convergente ou divergente ? Sur quels théorèmes s'appuie-t-on pour conclure la convergence ou la divergence d'une série alternée ? La condition de décroissance constante et indéfinie du terme général est-elle suffisante ? est-elle nécessaire ? G. L.

ÉCOLE CENTRALE

(PREMIÈRE SESSION; JUILLET 1887)

— On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F et qui passent par deux points donnés A et B.

1° Montrer que les coniques forment deux séries telles que, pour toute conique d'une série, la directrice correspondant au foyer F passe par un point fixe de la droite AB, situé entre A et B; tandis que, pour toute conique de l'autre série, la directrice correspondant au foyer F, passe par un point fixe de la droite AB, non situé entre A et B.

2° Trouver le lieu des centres des coniques considérées et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.

3° Prenant un point C sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur le lieu, si la conique considérée, dont le point C est centre, est telle que les points A et B sont sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.

4° Si le point C est tel que les points A et C soient sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point C, si cette conique et du genre ellipse ou du genre hyperbole, et, dans le premier cas, si les points A et B sont sur la branche voisine du point F, ou sur l'autre.

(*Nota*. — On prendra pour axe des x la droite AB et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite, menée par le milieu de AB.

(DEUXIÈME SESSION; OCTOBRE 1887)

— On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy.

$$OA = a \qquad OB = b.$$

1° Ecrire l'équation générale des paraboles qui passent par les trois points O, A, B. Montrer qu'en général, il passe par chaque point M du plan, deux de ces paraboles. Trouver le lieu des points M pour lesquels ces deux paraboles sont confondues, et indiquer la région du plan qui contient les points où il n'en passe aucune réelle.

(*) Voyez les feuilles publiées par la librairie Morant-Foucart (*admissibilité*, 1887, p. 16.)

2° Trouver le lieu des points M tels que les axes des deux paraboles qui y passent forment entre eux un angle donné α. Construire le lieu pour le cas où $\alpha = 90°$.

3° Trouver le lieu du point de chacune de ces paraboles pour lequel la tangente est parallèle à OB, celui du point où la tangente est parallèle à OB, celui où la tangente est parallèle à AB.

Ces lieux sont trois coniques. Construire ces coniques, vérifier que deux quelconques d'entre elles n'ont pas de point commun réel à distance finie, marquer leurs centres D, E, F, et comparer le triangle DEF au triangle OAB.

4° On joint l'origine O au point F, centre de la conique lieu du point de contact des tangentes parallèles à AB; et, à cette droite OF, on élève au point O, une perdendiculaire qui rencontre la droite AB en P. On demande le lieu du point P lorsque, le point A restant fixe, le point B parcourt l'axe des y.

QUESTION 118

Solution par M. Bourgarel.

Trouver la relation qui existe entre trois dérivées successives d'ordre quelconque de la fonction

$$(x^2 - 1)^n.$$

Montrer qu'il ne peut exister de relation entre deux dérivées successives; la dérivée d'ordre p *est exactement divisible par la dérivée d'ordre* $2n - p$. *Soit* $f(x)$ *une des dérivées de* $(x^2 - 1)^n$; $f'(x)$ *et* $f''(x)$ *étant les dérivées première et seconde de* $f(x)$, *la relation qu'il s'agit de trouver aura la forme*

$$Af(x) + Bf'(x) + Cf''(x) = 0;$$

chercher s'il existe d'autres fonctions entières du même degré vérifiant la même identité. (L. Lévy.)

Posons $$y = (x^2 - 1)^n$$

Nous aurons $$\frac{dy}{dx} = 2n(x^2 - 1)^{n-1}x$$

ou $$\frac{dy}{dx}(x^2 - 1) = 2nxy.$$

Appliquons la formule de Leibniz aux deux membres de cette identité, y étant considéré comme fonction de x. Nous avons ainsi

$$(x^2 - 1)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + p.2x.\frac{d^py}{dx^p} + \frac{p(p-1)}{2}\cdot 2\cdot\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$$

$$= 2nx\frac{d^py}{dx^p} + 2n.p.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}},$$

ou

$$(x^2 - 1)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} - 2(p - n)x\frac{d^py}{dx^p} - p(2n - p + 1)\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = 1. \quad (1)$$

Telle est la relation qui lie trois dérivées successives quelconques de y.

Quel que soit p, cette relation ne pourra pas contenir seulement deux dérivées successives, car p est inférieur ou égal à $2n$ (*).

Pour démontrer que la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n - p$, nous allons mettre la dérivée d'ordre p sous une certaine forme remarquable.

Remarquons, pour cela, que $\frac{dy}{dx}$ est égal à $2n(x^2 - 1)^{n-1}$ multiplié par x. On voit, de même, en prenant directement la dérivée seconde qu'elle est égale à $2n(x^2 - 1)^{n-2}$ multiplié par un polynôme entier en x et du second degré. Pour démontrer que cette loi est générale, supposons-la démontrée jusqu'à la dérivée d'ordre p et supposons que l'on ait

$$\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = 2n(x^2 - 1)^{n-p+1}P_{p-1},$$

$$\frac{d^py}{dx^p} = 2n(x^2 - 1)^{p-n}P_p.$$

P_{p-1} et P_p désignant des polynômes entiers en x de degrés respectivement égaux à $p - 1$, p.

(*) De ce que l'équation (1) ne peut pas se réduire à une relation entre deux dérivées successives, il ne résulte pas qu'on ne puisse trouver aucune autre relation de cette forme. Ainsi, s'il existait une seconde équation distincte de (1) et contenant les trois mêmes dérivées, l'élimination de $\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ conduirait à une relation entre deux dérivées successives.

Le second point demandait donc une démonstration directe et peut-être aussi eût-il convenu de prouver que l'équation (1) est unique de son espèce. La méthode d'identification employée plus loin par l'auteur de la solution que nous publions aujourd'hui conduisait parfaitement au résultat. L. LÉVY.

La relation (1) nous donne alors, après simplifications,

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}=2n(x^2-1)^{n-p-1}[2(n-p)xP_p+p(2n-p+1)(x^2-1)P_{p-1}].$$

On voit facilement que le polynôme entre parenthèses est de degré $p+1$ en x. La loi est donc générale. Si nons désignons par P_{n+1} ce polynôme nous avons

$$P_{p+1}-2(n-p)xP_p-p(2n-p+1)(x^2-1)P_{p-1}=0.$$

Telle est la relation que vérifient trois polynômes consécutifs; elle va nous permettre de démontrer que la dérivée d'ordre p est exactement divisible par la dérivée d'ordre $2n-p$.

Observons que la dérivée d'ordre $2n-1$ est $2n(2n-1)!\,x$. On a donc la relation

$$\frac{d^{2n-1}y}{dx^{2n-1}}=2n(2n-1)!\;P_1.$$

On vérifie de même, facilement, que

$$1.2.\;\frac{d^{2n-2}y}{dx^{2n-2}}=2n.(2_{n-2})\,!\;P_2.$$

Je dis que l'on a, en général :

$$p\,!\;\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}=2n(2n-p)\,!\;P_p,$$

En effet, supposons que cette relation ait lieu jusqu'au polynôme P_p, c'est-à-dire que l'on ait :

$$(p-1)\,!\;\frac{d^{2n-p+1}y}{dx^{2n-p+1}}=2n(2n-p+1)\,!\;P_{p-1}$$

$$p\,!\;\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}=2n(2n-p)\,!\;P_p.$$

Si nous portons dans la relation (1), appliquée aux dérivées d'ordre $2n-p+1$, $2n-p$, $2n-p-1$, les valeurs des dérivées d'ordre $2n-p+1$, $2n-p$, tirées de ces égalités, nous obtenons :

$$(2n-p)(p+1)p\,!\;\frac{d^{2n-p-1}y}{dx^{2n-p-1}}=(x^2-1)2np(2n-p+1)\,!\;P_{p-1}$$
$$+\;2n-p)x\;\;2n.(2n-p)\,!\;P_p. \qquad (2)$$

Or, nous avons

$$P_{p-1}=p(2n-p+1)(x^2-1)P_{p-1}+2(n-p)xP_p. \quad (3)$$

Multiplions les deux membres de l'identité (3) par

$2n(2n-p)!$ et retranchons de (2), nous obtenons :

$$(2n-p)(p+1)p!\,\frac{d^{2n-p-1}y}{dx^{2n-p-1}}+2n(2n-p)!\,P_{p+1}$$

ou $$(p+1)!\,\frac{d^{2n-p-1}y}{dx^{2n-p-1}}-2n(2n-p-1)!\,P_{p+1}.$$

Nous avons donc d'une manière générale :

$$p!\,\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}+2n(2n-p)!\,P_p.$$

et par suite :

$$\frac{d^py}{dx^p}=\frac{d^{2n-p}y}{dx^{2n-p}}(x^2-p)^{n-p}\frac{p!}{(2n-p)!}.$$

La dérivée d'ordre p est donc divisible par la dérivée d'ordre $2n-p$, le quotient est $\frac{p!}{(2n-p)!}(n^2-1)^{n-p}$.

Cherchons maintenant si l'on peut satisfaire à l'identité (1) en prenant pour y un polynôme entier en x de degré $2n$. Autrement dit, voyons si l'on peut déterminer les coefficients du polynôme

$$y=A_0x^{2n}+A_1x^{2n-1}+\ldots+A_{2n-1}x+A_{2n}$$

de façon que l'identité (1) soit vérifiée.

Calculons, pour cela, trois dérivées consécutives de ce polynôme et exprimons qu'elles satisfont identiquement à la relation (1). Nous obtenons ainsi les identités simplifiées :

$$-(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p+1)2nA_1=0$$
$$-2(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-p)A_2=2n(2n-1)\ldots(2n-p)A_0$$

. . . .

d'où $$A_1=0,\qquad A_2=-nA_0.$$

D'une manière générale on obtient :

$$A_1=0,\ A_3=0,\quad A_5=0\ldots$$
$$A_2=-nA_0,\qquad A_4=-\frac{n-1}{2}A_2\qquad A_6=-\frac{n-2}{3}A_4.$$

. . . .

On en déduit

$$A_{2k-1}=0,\qquad A_{2k}=(-1)^kC_n^kA_0,$$

C_n^k désignant le nombre de combinaisons simples de lettres k à k.

Il résulte de là que le polynôme considéré ne peut être autre que

$$A_0(x^2 - 1)^n.$$

Telle est la forme générale des fonctions dont trois dérivées successives satisfont à la relation (1).

QUESTIONS PROPOSÉES

233. — Soit Γ la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = a \operatorname{tg} \omega ;$$

le rayon vecteur qui part de l'origine O rencontre Γ en A, puis l'asymptote Δ (au bras correspondant à ce point A) en B. Traçons la perpendiculaire à OB, au point B. Cette droite coupe Oy en C. Soit D la projection de O sur Δ; démontrer que la tangente en A va passer par le point (autre que D) commun à la circonférence DAB et à la droite DC. *(G. L.)*

ERRATA. — Page 223,

au lieu de $\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ *lisez* $\sqrt{\dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}}$

Page 223, ligne 17,

lisez $y = L\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ et $y' = -\dfrac{2}{\cos 2x}$

Page 223, il a été fait, par suite de la mise en pages, une coupure dans la formule proposée au bas de cette page. Il faut lire :

$$y = a^{Lga \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}}$$

Page 224, ligne 10, les coefficients, placés dans la parenthèse, doivent être élevés au carré.

Page 224, ligne 18, *lisez*, $\sqrt{1 - x^2}$

Page 227, ligne 13, *lisez* $\cos^4 x$, *au lieu de* $\cos 4x$.

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22630-7.

NOTE SUR LA STROPHOÏDE OBLIQUE

Par M. Lebel.
étudiant à la Faculté des Sciences de Marseille.

Les propriétés de la strophoïde droite, mentionnées dans la Note publiée par le *Journal de Mathématiques spéciales* (juillet-août 1886) subsistent, sauf de légères modifications, pour la strophoïde oblique.

Dans ce qui suit, nous appellerons, pour abréger, *points conjugués*, deux points M_1, M_2 de la strophoïde, équidistants de Oy et situés de part et d'autre de Ox.

1. *Les tangentes menées à la strophoïde, en deux points conjugués* M_1, M_2 *se rencontrent sur la courbe.*

En vertu du théorème de Mac-Laurin, si trois points d'une courbe du troisième degré sont en ligne droite, leurs points tangentiels sont en ligne droite.

Considérons le point M_1 et le second point M_3 situé sur la traversale AM_1. En menant M_3M_2 parallèle à Oy, on rencontrera le point M_2, conjugué de M_1; car la droite M_3M_2 et le point M_1 sont équidistants de Oy.

On sait que la tangente en A passe au point V où la strophoïde coupe son asymptote. Si l'on trace

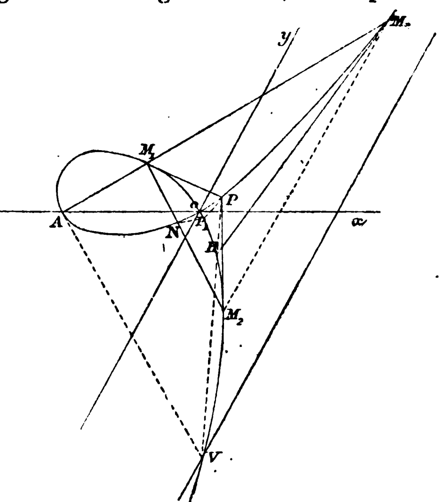


Fig. 1.

M_3H tangente en M_3, la droite VH est la droite de Mac-Laurin, relative à AM_1; elle coupe la strophoïde en un troisième point P qui est le point tangentiel de M_1.

Si l'on considère M_2M_3, cette droite coupe la courbe en un point rejeté à l'infini, dont V est le point tangentiel. Le point tangentiel de M_3 étant H, la droite VH est encore la droite de Mac-Laurin relativeà M_2 M_3; le point P sera aussi le point tangentiel de M_2. Les tangentes en M_1 et M_2 se rencontreront donc au point P.

2. — ***Réciproquement, si par un point*** **P** ***de la courbe, on lui mène deux tangentes*** **PM_1, PM_2,** ***les points de contact sont conjugués.***

En effet, on peut faire varier M_1 de manière que P soit un point quelconque de la courbe.

3. — Cherchons la droite des points tangentiels relative à M_1M_2. Laissons M_1 fixe, et déplaçons M_2 infiniment peu; son nouveau point tangentiel P′ sera infiniment voisin de P. La droite PP′, qui a pour limite la tangente en P, sera la droite cherchée.

Cela posé, on vérifie aisément que les trois côtés du triangle M_1PM_2 ont, pour commune droite des points tangentiels, la tangente PP_1 au point P. Si donc N est le troisième point d'intersection de M_1M_2 avec la courbe, la tangente en N passe en P_1, point tangentiel de P.

Ainsi P *et* N *sont des points conjugués.*

4. — *Si deux points* M_1M_2 *sont conjugués,* Ox *est bissectrice de l'angle* M_1AM_2.

En effet, considérons le deuxième point M_3, situé sur la transversale AM_1 : M_2M_3 est parallèle à oy, donc

$$\frac{M_2I_2}{M_3I_1} = \frac{AI_2}{AI_1},$$

Et comme

$$M_2I_2 = OI_2,$$
$$M_3I_1 = OI_1,$$

on a, en substituant,

$$\frac{OI_2}{OI_1} = \frac{AI_2}{AI_1};$$

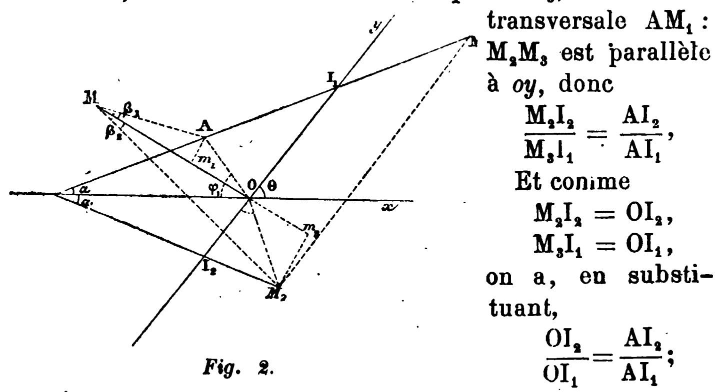


Fig. 2.

ce qui montre que Ox est bissectrice de l'angle M_1AM_2.

Nous désignerons par α les angles égaux en A.

5. — *Si* M_1 *et* M_2 *sont deux points conjugués, l'angle de* OM_1 *avec* Ox *est le même que l'angle de* OM_2 *avec* Oy.

En désignant par θ l'angle xoy, posons

$$AOM_1 = \varphi_1, \qquad I_2OM_2 = \varphi_2.$$

Considérons le triangle isocèle OI_2M_2

$$\varphi_2 = \frac{AI_2O}{2} = \frac{180^\circ - \theta - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\theta + \alpha}{2}.$$

Dans le triangle isocèle $OI_1\,M_1$, l'angle en I_1 égale $\theta - \alpha$, et l'on a :

$$\frac{1}{2}OM_1I_1 = \frac{180^\circ - I_1}{2} = 90^\circ - \frac{\theta - \alpha}{2};$$

ce qu'on peut écrire:

$$\alpha + \varphi_1 = 90^\circ - \frac{\theta - \alpha}{2},$$

$$\varphi_1 = 90^\circ - \frac{\theta + \alpha}{2}.$$

Donc on a bien, $\qquad \varphi_1 = \varphi_2.$

Réciproquement, *si* $\varphi_1 = \varphi_2$, *les points* M_1, M_2 *sont conjugués*. Car l'angle φ_2 ne définissant qu'un point M_2 de la courbe, le point conjugué de M_1, qui vérifie la relation précédente, ne peut être que M_2.

6. — *Les distances de deux points conjugués, au point double, sont vues, de tous les points de la strophoïde, sous des angles égaux.*

Prenons le point O comme pôle et Ox comme axe polaire: l'équation de la strophoïde sera :

$$\rho = a\,\frac{\sin(2\omega - \theta)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Calculons les rayons vecteurs $OM_1 = \rho_1$, $OM_2 = \rho_2$, des deux points conjugués. Si ω_1, ω_2 sont leurs angles polaires,

$$\omega_1 = \pi - \varphi_1 = \pi - \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \alpha}{2}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta + \alpha}{2},$$

$$\omega_2 = \pi + \theta + \varphi_2 = \pi + \theta + \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \alpha}{2}\right] = 3\,\frac{\pi}{2} + \frac{\theta - \alpha}{2}.$$

Donc :

$$\rho_1 = a \frac{\sin(\pi + \theta + \alpha - \theta)}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} - \frac{\theta + \alpha}{2}\right)} = a \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta - \alpha}{2}},$$

$$\rho_2 = a \frac{\sin(3\pi + \theta - \alpha - \theta)}{\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta - \alpha}{2}\right)} = a \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta + \alpha}{2}}.$$

Soit maintenant un point M (ρ, ω) de la strophoïde. Calculons les angles β_1, β_2 sous lesquels on voit, de ce point, les rayons vecteurs OM_1 OM_2. Projetons M_1 et M_2 en m_1 et m_2, sur OM :

$$\text{tg}\, \beta_1 = \frac{M_1 m_1}{OM - Om_1} = \frac{\rho_1 \sin(\omega - \omega_1)}{\rho - \rho_1 \cos(\omega - \omega_1)},$$

$$\text{tg}\, \beta_2 = \frac{M_2 m_2}{OM_1 + Om_2} = \frac{\rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)}{\rho - \rho_2 \cos(\omega_2 - \omega)}.$$

Si β_1, β_2 sont égaux,

$$\frac{\rho_1 \sin(\omega - \omega_1)}{\rho - \rho_1 \cos(\omega - \omega_1)} = \frac{\rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)}{\rho - \rho_2 \cos(\omega_2 - \omega)},$$

ou $$\rho[\rho_2 \sin(\omega - \omega_1) - \rho_2 \sin(\omega_2 - \omega)]$$

$$= \rho_1\rho_2[\sin(\omega - \omega_1)\cos(\omega_2 - \omega) - \cos(\omega - \omega_1)\sin(\omega_2 - \omega)]$$

$$\rho\left[\frac{\sin(\omega - \omega_1)}{\rho_2} - \frac{(\sin \omega_2 - \omega)}{\rho_1}\right] = \sin(2\omega - \omega_1 - \omega_2),$$

$$\frac{\rho}{a \sin \alpha}\left[\sin(\omega - \omega_1) \cos \frac{\theta - \alpha}{2} - \sin(\omega_2 - \omega) \cos \frac{\theta + \alpha}{2}\right] = \sin(2\omega - \theta),$$

$$\frac{\rho}{a \sin \alpha}\left[-\cos\left(\omega - \frac{\theta + \alpha}{2}\right)\cos\frac{\theta + \alpha}{2} + \cos\left(\omega - \frac{\theta + \alpha}{2}\right)\cos\frac{\theta - \alpha}{2}\right] = \sin(2\omega - \theta),$$

$$\frac{\rho}{2a \sin \alpha}[-\cos\omega - \cos(\omega - \theta - \alpha) + \cos\omega + \cos(\omega - \theta + \alpha)]$$

$$= \sin(2\omega - \theta) - \frac{\rho}{a \sin \alpha} \sin(\omega - \theta) \sin \alpha = \sin(2\omega - \theta),$$

$$\rho = a \frac{\sin(2\omega - \theta)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Cette condition est vérifiée, puisque le point M appartient à la strophoïde.

7. — *La tangente en un point* M_1, *et la droite* M_1M_2 *qui le joint à son conjugué, sont symétriques par rapport au rayon* OM_1.

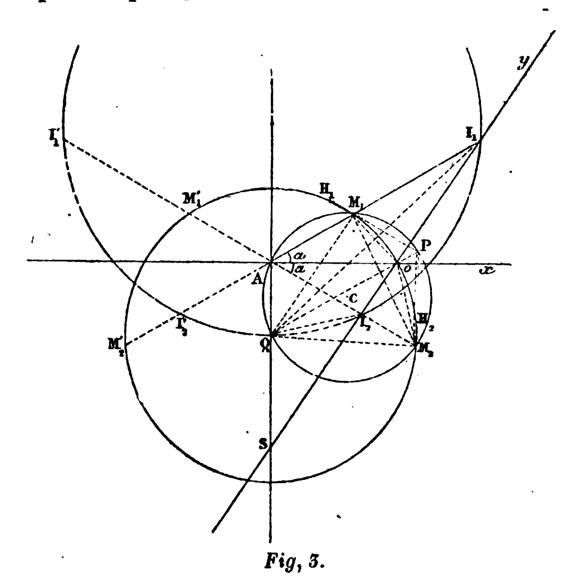
Si l'on imagine que M vienne se confondre avec M_1, la droite MM_1 devient la tangente en M_1 ; la droite MM_2 devient M_1M_2. Les angles β_1, β_2 ne cessent pas d'être égaux.

8. — *Si l'on mène, par un point* P *de la strophoïde, deux tangentes* PM_1, PM_2 *à la courbe, le point double est le centre du cercle inscrit au triangle* M_1PM_2.

En effet, d'après la remarque précédente, les bissectrices des angles M_1, M_2 passent au point double.

9. — *Le lieu des centres des cercles passant par le point double et deux points conjugués, est la perpendiculaire élevée sur* Ox *au point* A.

Soient toujours I_1, I_2 les intersections de AM_1, AM_2 avec Oy. Faisons passer, par I_1 et I_2, une circonférence ayant son centre



Fig, 3.

sur la perpendiculaire AS à Ox ; soit Q le point d'intersection de cette circonférence avec AS, le plus rapproché de I_2. Traçons

QI_1, QI_2, et prolongeons I_1A, I_2A, jusqu'à leur second point de rencontre avec le cercle. On obtient ainsi des points I'_1, I'_2 symétriques de I_1 et I_2 par rapport à AS. Les angles QI_1I_2 et $QI_1I'_2$ sont égaux comme mesurés par des arcs égaux ; il en est de même des angles QI_2A et QI_2S. Les bissectrices des angles AI_1S et AI_2S se coupent donc au point Q. Or M_1 et M_2 sont les symétriques de O, par rapport à ces bissectrices; donc Q est le centre du cercle passant par les trois points M_1, O, M_2.

10. — P étant le point tangentiel de M_1 et de M_2, la tangente PM_2 coupe le cercle Q en un point H_2 tel, que les arcs OH_2, OM_1 sont égaux, puisque la bissectrice de l'angle $H_2M_2M_1$ passe en O. M_1 et H_2 sont symétriques par rapport à QO. De même, le symétrique de M_2 est le point H_1, situé sur PM_1. Les droites PM_1, PM_2 sont donc symétriques par rapport à QO. Elles le sont aussi par rapport à OP (8); donc OP et OQ se confondent.

Ainsi, OP *passe au point* Q.

11. — *Les quatre points* A M_1 M_2 Q *sont sur un même cercle.*

L'angle M_1AM_2 a pour mesure, sur le cercle Q, la demi-somme des arcs M_1M_2, $M_1'M_2'$. Or, ces arcs sont symétriques et égaux; l'angle est donc mesuré par M_1M_2; cet arc est aussi la mesure de l'angle M_1QM_2.

Le cercle C circonscrit au triangle M_1AM_2 passera donc par le point Q.

12. — *Le cercle* Q *passe par le point* P.

La somme des angles OM_1M_2, OM_2M_1 est mesurée, sur le cercle Q, par la moitié de l'arc M_1M_2; la somme des angles PM_1M_2, PM_2M_1, qui est double de la précédente (7) est donc égale à 2α. L'angle M_1PM_2 est supplémentaire de l'angle 2α; donc le quadrilatère AM_1PM_2 est inscriptible au cercle C.

Ainsi, *les cinq points* A, M_1, M_2, P, Q *sont sur une même circonférence.*

13. — *Le point de contact, sur* M_1M_2, *du cercle inscrit au triangle* M_1PM_1, *est le conjugué de* P.

Le milieu K de M_1M_2 étant sur Oy, la droite QK est perpendiculaire sur M_1M_2; cette droite et la bissectrice de l'angle M_1OM_2, sur le cercle Q se démontrent, en un point L, milieu de l'arc M_1LM_2. La perpendiculaire OR abaissée de O sur M_1M_2, est parallèle à QK; les angles LOR, OLQ sont égaux comme alternes-internes;

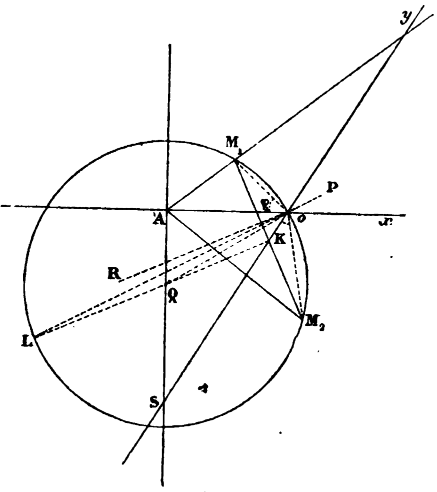


Fig. 4.

et, comme le triangle OLQ est isoscèle,

$$\text{OLQ} = \text{QOL};$$

d'où

$$\text{LOR} = \text{QOL}.$$

Les droites OR, OL sont symétriques par rapport à OL. Or en vertu de l'égalité des angles φ_1 et φ_2, OL est bissectrice de l'angle AOS, et l'on a

$$\text{ROA} = \text{QOS},$$
$$\text{ROA} = x\text{OP}.$$

L'égalité de ces angles montre (5) que OR passe par le point conjugué de P. On a vu que ce point (2) est situé sur M_1M_2; il est donc l'intersection de M_1M_2 et de OR, ou la projection de O sur M_1M_2.

14. — *La droite* M_1M_2 *enveloppe une parabole.*

C'est la podaire négative de la strophoïde, par rapport à son point double.

APPLICATIONS.

Les remarques précédentes permettent de résoudre, de différentes manières, les problèmes suivants :

— *Mener la tangente en un point de la strophoïde oblique;*

— *Mener par un point de la strophoïde les autres tangentes à la courbe.*

On pourra procéder comme il suit :

I. *Première méthode.* — Pour mener la tangente en un point M_1, situé sur une transversale AM_1, on déterminera le point conjugué M_2, situé sur la symétrique de AM_1; on construira le cercle O tangent à M_1M_2, et on lui mènera, par M_1, une seconde tangente M_1P, laquelle sera la tangente cherchée (8). Autrement dit, on construira la symétrique de M_1M_2 par rapport à OM_1 (7).

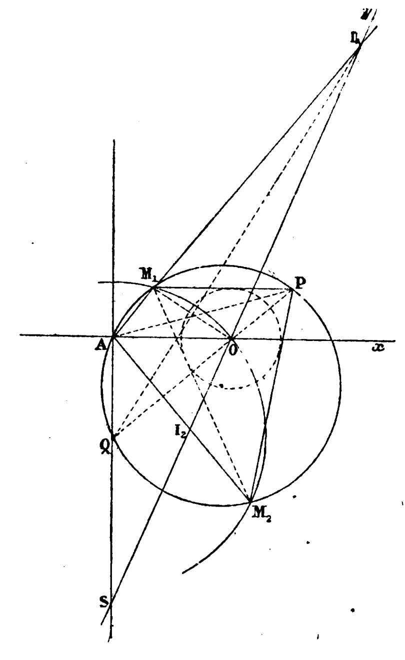


Fig. 5.

Seconde méthode. — On déterminera le centre Q par la bissectrice de l'angle AI_1O_1 et, l'on cherchera l'intersection P de QO avec la strophoïde.

La construction devient d'une facilité remarquable dans le cas de la *strophoïde droite.* Alors le triangle QAI_1 est isoscèle, ainsi que le triangle QAP. Il suffit de décrire, de A comme centre, une circonférence passant par I_1, laquelle détermine Q et ensuite P, par son intersection avec QO.

II. *Première méthode.* — Étant donné le point P, on déterminera son conjugué N ; on décrira, de O comme centre, avec ON pour rayon, un cercle auquel on mènera par P deux tangentes. La tangente en N, à ce cercle, sera (13) la droite M_1M_2 qui coupera ces tangentes aux points de contacts.

Seconde méthode. — On tracera la droite POQ ; on décrira le cercle Q passant par O, puis le cercle C circonscrit au triangle PAQ. Les points communs à ces deux cercles sont les points de contact M_1, M_2.

QUESTIONS D'EXAMEN

25. — *On coupe l'ellipsoïde par des plans* P, *passant par le centre* O *de la surface; au point* O, *on élève, à* P, *une perpendiculaire, sur laquelle on prend une longueur* OI, *proportionnelle à l'aire de la section considérée; trouver le lieu décrit par* I.

On sait (*C. de M. S.*, t. III, p. 237) que la grandeur des axes de la section centrale faite dans l'ellipsoïde, par le plan qui correspond à l'équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

est donnée par l'égalité

$$\frac{a^2\alpha^2}{a^2 - R^2} + \frac{b^2\beta^2}{b^2 - R^2} + \frac{c^2\gamma^2}{c^2 - R^2} = 0,$$

laquelle, sous forme entière, s'écrit encore

$$\Sigma a^2\alpha^2(R^2 - b^2)(R^2 - c^2) = 0,$$

Le carré du produit des demi axes est donc

$$\frac{a^2b^2c^2}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2},$$

en supposant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$

Finalement, le lieu est un ellipsoïde, ayant pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = h^4,$$

h désignant une constante donnée.

QUESTIONS ÉNONCÉES

DÉTERMINANTS

1. — Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

On peut remarquer, *a priori*, que Δ est divisible par

$$(a-b)(b-c)(c-a);$$

puis l'on pose:

$$\Delta = H(a-b)(b-c)(c-a).$$

Pour déterminer H, on observe que Δ est une forme homogène, du quatrième degré, symétrique relativement aux lettres a, b, c. D'après cela, H est une forme symétrique linéaire. Ecrivons donc:

$$\Delta_1 = K(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Enfin l'examen du terme principal bc^3, prouve que $K = 1$.

Finalement, on a:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

On pourra, par des considérations de même nature, développer les déterminants suivants. Cet exercice, et quelques-uns des exemples qui suivent, se trouvent dans le *Traité élémentaire des déterminants*, par M. Leboulleux (Librairie Delagrave).

2. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & b & c \\ 1 & a & -b & c \\ 1 & a & b & -c \end{vmatrix} = abc\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

3. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + 1\right).$$

4. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = -a(a-b)(b-c)(c-a).$$

5. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

7. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

8.
$$\begin{vmatrix} x & x^2 & (1+x^2)(ax+b) \\ y & y^2 & (1+y^2)(ay+b) \\ z & z^2 & (1+z^2)(az+b) \end{vmatrix} = (axyz + b)(x - y)(y - z)(z - x).$$

On décompesera ce déterminant en deux déterminants du troisième ordre, en observant que la troisième colonne peut être écrite ainsi :

$$\begin{matrix} (1+x^2)ax + b(1+x^2) \\ (1+y^2)ay + b(1+y^2) \\ (1+z^2)az + b(1+z^2) \end{matrix}$$

9.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix} = 2(\cos a - \cos b)(\cos b - \cos c)(\cos c - \cos a)$$

On pourra généraliser cet exercice et chercher le développement du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \cos na & \cos nb & \ldots & \cos nl \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos a & \cos b & \ldots & \cos l \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

lequel, avec plusieurs autres, a été considéré par M. Fouret (*Comptes Rendus*, 2 décembre 1884). A une constante près, ce déterminant est égal à la fonction factorielle :

$$\Pi(\cos a - \cos b).$$

Voyez, à ce propos, le *Bulletin de la Société Mathématique de France*; 1884-85, p. 15.

EXERCICES ÉCRITS

5. — D'un point M, mobile sur une strophoïde droite S, on peut mener à cette courbe deux tangentes, en faisant abstraction de celle qui a son point de contact en M.

Soient T, T' les points de contact de ces deux tangentes. Trouver :

1° La condition pour que MT soit réelle;

2° Le lieu décrit par le milieu de TT';

3° L'enveloppe de TT';

4° Le lieu décrit par le centre du cercle circonscrit au triangle MTT', et l'enveloppe de ce cercle.

(*Bernheim*, élève au lycée de Besançon).

Notes sur l'exercice 4.

1° On sait (*) que le cercle Γ qui passe par les pieds des trois normales issues du point (α, β) à la parabole représentée par $y^2 - 2px = 0$ (axes rectangulaires) a pour équation:

$$x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta y}{2} = 0.$$

On trouve ainsi, pour le lieu de I,

$$(x + p)x_0 + \frac{yy_0}{2} - x_0^2 - y_0^2 = 0. \qquad (\Delta)$$

En écrivant cette équation sous la forme:

$$x_0(x_0 - p - x) = y_0\left(\frac{y}{2} - y_0\right),$$

on met deux solutions en évidence:

$$x = x_0 - p, \qquad \text{et} \qquad x + p - x_0 = y_0,$$
$$y = 2y_0; \qquad \frac{y}{2} - y_0 + x_0 = 0,$$

On peut aussi, pour déterminer Δ, observer que cette droite est parallèle à celle qui joint l'origine au point $\left(x = -\frac{y_0}{2}, \quad y = x_0\right)$.

2° On trouve l'ellipse correspondant à l'équation:

$$(x + p)^2 + \frac{1}{4}y^2 = R^2.$$

3° Le lieu demandé est une cubique dont l'équation est:

$$y^2(p + 8x) = 8x^2(p - x).$$

Cette cubique a la forme d'une branche strophoïdale; le point le plus haut du *folium*, sauf erreur, correspond à $x = p\frac{5 + \sqrt{153}}{32}$.

4° La conique U est une hyperbole, dont l'équation est:

$$y(2yx_0 - xy_0) - px_0x = p(x_0^2 + y_0^2 - 2px_0),$$

on détermine facilement les asymptotes et un point de cette courbe.

5° En remplaçant x par $\frac{y^2}{2p}$, dans l'équation précédente, on obtient une équation du troisième degré en y; on exprime qu'elle a deux racines égales et l'on trouve:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2px_0 = 0,$$

si les deux racines égales sont nulles;

et $$(x_0^2 + y_0^2)(y_0^2 - 2px_0) = 0,$$

lorsqu'elles sont égales et différentes de zéro.

CORRESPONDANCE

Liège, le 12 octobre 1887.

Mon cher Collègue,

Vous avez, dans votre excellent *Journal de Mathématiques spéciales* (2e série, t. IV, pp. 156-159) appelé, avec raison, l'at-

(*) *C. M. S.*; t. II, p. 482.

tention sur une méthode de construction des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués, méthode trop oubliée, qu'on rencontre dans le *Traité des sections coniques* du marquis de l'Hospital (*).

Permettez-moi de venir réclamer cette élégante construction pour son véritable inventeur, le Géomètre Montois J-F. LE POIVRE : j'espère que cette petite discussion sera de nature à intéresser les lecteurs de votre estimable Revue.

La construction des axes de l'ellipse se trouve exposée dans un petit traité de notre compatriote, intitulé : *Traité des sections du cylindre et du cône, considérées dans le solide et dans le plan, avec des démonstrations simples et nouvelles*, par *M. Le Poivre*, de la ville de Mons, à Paris, chez Barthelémy Girin, rue Saint Jacques, vis-à-vis la fontaine Saint-Severin, à la Prudence, MDCCIV.

Le problème occupe la page 12.

Le Poivre commence, p. 10, par résoudre cette question. Etant donnés deux diamètres conjugués d'une ellipse trouver le cercle générateur, c'est-à-dire construire la base d'un cylindre circulaire oblique, dont l'ellipse donnée soit la section.

La solution est extrêmement simple; à la forme près, Le Poivre emploie précisément la transformation homographique dont vous faites usage, transformation qui ne se rencontre pas dans le Traité de l'Hospital.

Comme l'auteur de l'*Analyse des infiniment petits*, le Géomètre de Mons détermine encore deux diamètres conjugués faisant un angle donné, lorsque les axes sont connus; puis il donne une démonstration analytique de sa construction, tout-à-fait comme l'Hospital.

L'identité entre les deux écrits étant démontrée, tout se réduit à une question de date.

A première vue, c'est fort aisé : le traité de l'Hospital a paru en 1707, celui de Le Poivre en 1704; mais le premier est un écrit posthume, et le marquis est mort le 2 février 1704.

Or, le privilège de Le Poivre est daté du 13 janvier 1704.

(*) *Traité analytique des sections coniques*, Paris, 1707, pp. 37-38. 2e édition, 1720, pp. 37-38

Dès le 30 juin 1704, le *Journal des Sçavans* (*), dans un article peu favorable à Le Poivre, publie une analyse du petit mémoire de notre Géomètre, et mentionne le problème relatif aux diamètres conjugués faisant un angle donné: le problème de la construction des axes est cité dans l'analyse du *Traité,* parue dans les *Acta Eruditorum* en 1707 (**).

Tout cela est antérieur à l'apparition du traité de l'Hospital.

Il ne reste donc qu'à examiner une hypothèse : c'est que Le Poivre, auquel on a reproché de s'être emparé de la méthode des Planiconiques de la Hire, — reproche dont Chasles l'a d'ailleurs entièrement justifié, (***) — devrait sa solution à l'Hospital. Or, c'est précisément le contraire qui est vrai.

En 1708, Le Poivre publia à Mons, une nouvelle édition, entièrement transformée, de son livre, sous le titre de : *Traité des sections du cône considérées dans le solide, avec des démonstrations simples, et nouvelles plus simples et plus générales que celles de l'édition de Paris,* par monsieur Le Poivre, contrôleur des ouvrages de la ville de Mons. A Mons, chez la veuve Gaspard Migeot, Rue des Clercs vis-à-vis la Croix MDCCVIII (****).

Les dernières pages de cette édition sont consacrées à une réfutation en règle de l'article du *Journal des Savants*; incidemment, il parle de sa solution du problème qui consiste à déterminer deux diamètres conjugués faisant un angle donné, lorsque l'on connaît deux diamètres conjugués quelconques.

Ce problème avait été résolu par le marquis de l'Hospital, et d'une façon fort compliquée, en se servant de la méthode de transformation de Le Poivre, mais c'est ce dernier qui imagina, non seulement la méthode générale dont il vient d'être question, mais encore la division du problème en

(*) *Journal des Sçavans*, Edition de Liège t. VIII. 1704, pp. 659-657. Edition d'Amsterdam, t. XXXII. 1705. pp. 649-658.

(**) *Acta Eruditorum* , mars 1707, pp. 132-133.

(***) *Aperçu historique*, p. 130 ; *Traité des sections coniques*, p. 174, en note.

(****) Il n'existe qu'un seul exemplaire de ce petit livret : il se trouve à la bibliothèque de Mons, où il est coté 1988. Une réimpression en a été faite en 1854, à Mons, par les soins de M. C. Wins.

deux parties, dont la première concerne la construction des axes; c'est cette solution que l'Hospital « avait assez estimée pour l'adopter en quelque manière. en l'inscrivant toute entière dans ses ouvrages », pour me servir des termes de Le Poivre. Notons en passant, que c'est notre Géomètre qui traça les figures du *Traité analytique des sections coniques.*

Si le marquis de l'Hospital ne cite pas notre compatriote, on peut supposer, avec un des biographes (*) de Le Poivre, que le célèbre Géomètre eût sans doute réparé cet oubli s'il lui eût été donné d'écrire une préface à son livre.

En effet, ce n'est pas seulement le problème de la construction des axes qu'il paraît lui devoir, mais bien encore tout le sixième livre, au moins quant au fond des idées.

Me permettez-vous, mon cher collègue, d'appeler votre attention sur un autre point.

Il s'agit de la construction d'un groupe harmonique, que vous attribuez à La Hire *(Journal de mathématiques élémentaires* 2e série, t. IV, p. 89.): cette construction est due à François van Schooten: *Exercitationum liber II.* 1656, p. 174. (Et dans l'édition en hollandais, 1660, p. 166).

Pardonnez-moi si ma lettre ne contient que des observations de critique; c'est que si je devais vous faire part des observations élogieuses, mon temps n'y suffirait pas.

Dr C. Le Paige.

BIBLIOGRAPHIE

Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand par P. Mansion, professeur ordinaire à l'Université de Gand, etc., (Paris) Gauthier-Villars, un volume grand in-8° de VIII. 300 pages; prix dix francs; — L'ouvrage que vient de faire paraître M. P. Mansion est le résumé des leçons qu'il professe depuis vingt ans à l'Université de Gand. Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous permette pas de donner ici une analyse plus circonstanciée de ce savant traité où sont exposés, avec une rigueur qui sera certainement remarquée, les principes du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Nous aurions voulu, non seulement

---

(*) Aug. Cambier, *Notice sur les ouvrages de J.-F. Le Poivre*

signaler ce livre à nos lecteurs, mais, dans un article digne de l'auteur et du sujet qu'il a traité, montrer quels sont les points originaux et caractéristiques de l'ouvrage en question.

Si nous ne nous trompons, le côté personnel du cours de M. P. Mansion réside principalement, outre la rigueur d'exposition déjà signalée, dans l'introduction immédiate de la variable complexe pour l'étude des fonctions. Que l'on approuve, ou non, cette manière d'entrer de plein pied au cœur de l'Analyse, il en résulte de notables transformations dans l'exposition des démonstrations ordinaires et, comme le fait observer avec raison M. Mansion dans sa préface, l'enseignement traditionnel se trouve ainsi profondément modifié. Néanmoins, si on le veut, on peut laisser de côté tout ce qui a rapport au cas où la variable est imaginaire, sans que pour cela, en aucun endroit, il y ait une solution de continuité dans l'exposition de la théorie des fonctions élémentaires d'une variable réelle. L'ouvrage se complète par un appendice consacré à de nombreux renseignements historiques, pleins d'érudition et d'intérêt, et par des notes complémentaires commentant certains passages jugés, par l'auteur, d'une rédaction trop concise.

J'ai signalé, comme une caractéristique de l'ouvrage de M. P. Mansion la très grande rigueur que l'auteur apporte dans l'établissement des principes de l'Analyse infinitésimale : on peut dire qu'il pousse, sur ce point, le scrupule aux dernières limites, comme en témoignent notamment les chapitres IV et V de son Appendice (*). Je reconnais d'ailleurs que cette manière de faire est tout à fait dans le courant moderne (**), lequel est, en principe, des plus légitimes et je suis probablement mal venu de ne pas le trouver parfait. Pourtant, je n'ai pu m'empêcher, en lisant l'ouvrage de M. P. Mansion, et surtout certains passages de quelques autres livres, récemment publiés, de me rappeler ce que dit, avec tant de vérité, Pascal dans ses *Pensées* lorsqu'il recommande de « n'entreprendre de démontrer aucune des choses tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour le prouver » et Terquem, faisant un jour cette citation, rappelait à ce propos le mot de D'Alembert, parlant de ces démonstrations inutiles et disant « après avoir lu de tels raisonnements, il ne tient plus qu'au lecteur d'en douter. »

Il ne faut rien exagérer, et peut-être a-t-on été trop loin dans ces développements philosophiques concernant les notions premières de la limite. Il y a, dans l'Analyse, comme dans la Géométrie, des axiomes nécessaires En admettant qu'on puisse en réduire le nombre, il n'y a nul profit à le faire, au moins pour l'enseignement, si l'effort que nécessite cette réduction est trop considérable et en disproportion avec l'effet obtenu

En terminant ces réflexions, nous relèverons dans le livre de M. P. Mansion, un point qui nous a frappé, et sur lequel nous désirons appeler l'attention de nos lecteurs.

(*) Ces deux chapitres semblent d'ailleurs destinés surtout aux professeurs; car l'auteur a soin de faire remarquer en note que les principes du premier sont tous à peu près évidents et que le théorème, démontré trop minutieusement dans le second, ne lui sert qu'une seule fois, pour établir, à la fin du livre, le caractère de convergence des séries, dû à Abel.

(**) Voyez, à ce propos, la *note sur quelques points de la théorie des fonctions* de M. C. Jordan; *Cours d'Analyse* t. III (Gauthier-Villars 1887).

D'après une remarque de M. Cesáro, citée en note par M. P. Mansion, le théorème qui correspond à l'énoncé suivant : *pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire que l'on ait* $\lim (nu_n) = 0$, *pour* $n = \infty$, ne serait pas exact. A l'appui de cette affirmation, M. Cesáro produit l'exemple de la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9}, \text{etc.},$$

laquelle est convergente comme étant la somme des séries convergentes :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots \qquad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Cependant, dit M. Cesáro, le produit nu_n étant égal à l'unité, chaque fois que n est un carré, n'a pas zéro pour limite.

Cette objection ne nous paraît pas fondée et voici pourquoi :

Lorsqu'on dit que *lim* nu_n étant, (pour $n = \infty$) un nombre k, la série correspondante est divergente, il est bien entendu que l'hypothèse avancée est accordée *quel que soit* n et non pour des valeurs *particulières* de n. Le texte de l'énoncé, et la démonstration qui l'accompagne, sont d'accord sur ce point. L'expression *Lim* nu_n n'a aucun sens si l'on n'entend pas que n croît infiniment, par des valeurs quelconques, ou, tout au moins, dans le cas présent, par des valeurs entières quelconques. Si l'on se reporte à la démonstration, elle est non moins explicite sur ce point. Elle exige, en effet que, au moins à partir d'un certain terme, constituant le premier terme de la partie que l'on doit étudier, les produits

$$1u_1, \quad 2u_2, \quad 3u_3, \quad \ldots, \quad nu_n, \quad \ldots$$

restent constamment supérieurs à un nombre fixe et déterminé K'. Cette condition n'est pas remplie dans l'exemple proposé par M. Cesáro, et, à notre avis, son objection, ni aucune autre, ne peuvent prévaloir contre un théorème qui, ni dans la forme de son énoncé, (*) ni dans la démonstration qu'on en donne, ne peut donner prise à un malentendu.

Nous eussions voulu parler encore, dans cette notice bibliographique, de deux autres livres que vient de publier la librairie Gauthier-Villars : la *thermodynamique de M. Joseph Bertrand* (**) et les *leçons sur la théorie*

(*) De la correspondance que nous avons échangée, sur ce sujet, M. Mansion et moi, il résulte que c'est la forme habituellement donnée à l'énoncé qui est contestable. M. Mansion répondant à une question que je lui adressais, à ce propos, m'écrit : « Il faut énoncer le théorème comme vous le proposez : *Si* nu_n, *pour* $n = \infty$ *a une limite différente de zéro, la série est divergente* ». Je croyais, en écrivant les lignes qu'on vient de lire, que c'était le fond même du théorème qui se trouvait attaqué par la remarque de M. Cesáro. Car, pour corriger la forme de l'énoncé, aucun exemple n'était nécessaire : cette correction, du moment que la clarté de l'énoncé est contestée, va de soi ; elle doit être immédiatement et pleinement accordée. Mais, dans l'exemple proposé par M. Cesáro, et reproduit plus haut, il ne faut pas dire que *lim* nu_n *n'est pas zéro* ; la limite du nu_n dans cette série, n'est pas susceptible d'être déterminée.

En résumé, prise à la lettre, la remarque de M. Cesáro est exacte si elle ne vise que les sous-entendus que comporte l'énoncé classique, et on peut les faire cesser en lui donnant la forme plus explicite, indiquée plus haut.

(**) On trouvera une analyse de cet ouvrage dans le dernier numéro des *Annales de Mathématiques*.

générale des surfaces, de M. Gaston Darboux. Mais le nom des auteurs, la nature élevée des matières qu'ils ont traitées dans ces deux ouvrages, nous défendraient d'en faire un compte rendu superficiel; enfin, tout au moins pour l'un d'eux, nous n'avons pas besoin d'ajouter combien la compétence nécessaire nous eût fait défaut, pour mener à bien cette tâche.

Nous nous bornerons à rappeler aux candidats au prochain concours de l'Agrégation mathématique, s'il en est qui nous lisent, qu'ils auront à faire une connaissance approfondie du livre si remarquable que vient de publier M. G. Darboux; leur programme, à défaut d'un autre intérêt, leur en fait un devoir rigoureux. Ils pourront alors vérifier quel plaisir on éprouve à lire une théorie, d'un ordre si élevé, et pourtant si clairement exposée, et ils doivent s'estimer bien heureux qu'on signale à leur attention un pareil livre, plein d'aperçus nouveaux, intéressant dans les moindres parties qu'il développe, bien écrit et, ce qui ne gâte rien, admirablement imprimé. Ce livre ajoutera singulièrement aux titres scientifiques, déjà si considérables, de M. G. Darboux, et nous le félicitons, bien cordialement, du succès qui accompagne son nouvel ouvrage. Un second volume traitant: *la théorie des systèmes de rayons rectilignes, les formules de Codazzi, les lignes géodésiques* et la *théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, paraîtra prochainement; il ne sera pas moins bien accueilli que son aîné.

G. L.

QUESTION 45

Solution par M. Paul Bourgarel, à Antibes.

On considère un point m *dont les coordonnées sont* x *et* y*; à ce point on fait correspondre un point* M *dont les coordonnées* X *et* Y *sont liées à* x *et* y *par les formules*

$$x = X, \qquad yY = a^2.$$

On propose d'étudier cette transformation; on établira en particulier les points suivants :

1. A une courbe f, *d'ordre* p, *correspond également une courbe* F, *d'ordre* 2p; *mais si* f *possède à l'infini, dans la direction* Oy, *un point de multiplicité* k, *l'ordre de* F *n'est plus que* $2p - k$.

2. Les tangentes aux courbes f *et* F *aux points correspondants* m *et* M *rencontrent* Ox *en deux points équidistants du pied de l'ordonnée.*

3. Appliquer cette remarque à l'hyperbole considérée comme transformée de la droite par ce procédé et retrouver ainsi une construction bien connue.

4. *Etudier les cubiques de la troisième classe,*

$$x^2y = m^3,$$

en les considérant comme des tranformées de la parabole; montrer en particulier que, si l'on appelle P *le pied de l'ordonnée en un point* M *de cette cubique, et* T *le point de rencontre de la tangente en* M *avec* Ox, *on a :*

$$OT = \frac{3}{2}OP.$$

5. ***Déduire de cette transformation, et de la théorie des asymptotes, qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt.***

(G. L.)

1. — L'équation d'une courbe f d'ordre p ne possédant pas d'asymptote parallèle à Oy peut toujours se mettre sous la forme :

$$y^p\varphi_0(x) + y^{p-1}\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_p(x) = 0.$$

Dès lors l'équation de la courbe F, transformée de f, au moyen des formules données, est :

$$\left(\frac{a^2}{Y}\right)^p\varphi_0(X) + \left(\frac{a^2}{Y}\right)^{p-1}\varphi_1(X) + \ldots + \varphi_p(X) = 0,$$

ou : $a^{2p}\varphi_0(X) + a^{2(p-1)}Y\varphi_1(X) + \ldots + Y^p\varphi_p(X) = 0.$

La courbe f étant supposée une vraie courbe de degré p, $\varphi_p(x)$ n'est pas identiquement nul. Il en résulte que F est bien de degré $2p$.

Mais si f possède à l'infini, dans la direction Oy, un point de multiplicité k, son équation prend la forme :

$$y^{p-k}\varphi_k(x) + y^{p-k-1}\varphi_{k+1}(x) + \ldots + \varphi_p(x) = 0,$$

et l'équation de la courbe F transformée est :

$$a^{2(p-k)}\varphi_k(X) + \ldots + Y^{p-k}\varphi_p(X) = 0.$$

On voit que cette équation n'est plus que de degré $2p - k$.

2. — Pour démontrer cette seconde proposition, il suffit de vérifier que les sous-tangentes relatives à deux points correspondants des deux courbes f et F sont égales et de signes contraires.

La valeur de la sous-tangente relative au point m est $\dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}}$;

si $f(x, y) = 0$ est l'équation de f, la sous-tangente aura pour valeur

$$- y \cdot \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}}.$$

Si nous calculons, de même, la valeur de la sous-tangente relative au point M qui décrit la courbe F, dont l'équation est

$$f\left(X, \frac{a^2}{Y}\right) = 0,$$

Nous trouvons que cette sous-tangente a pour expression :

$$Y \cdot \frac{\frac{a^2}{Y^2} \cdot \frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}} \quad \text{c'est-à-dire:} \quad y \cdot \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dx}},$$

en vertu de la relation $yY = a^2$. Les deux sous-tangentes sont donc égales et de signes contraires (*).

3. — Si nous transformons une hyperbole rapportée à ses asymptotes, ayant pour équation $xy - k^2 = 0$, nous trouvons que la courbe transformée est :

$$a^2X - K^2Y = 0.$$

C'est une droite passant par l'origine.

Si donc nous appliquons à ces deux courbes la deuxième proposition, nous retrouvons cette propriété connue de l'hyperbole, à savoir que la tangente en un point de l'hyperbole coupe chaque asymptote en un point symétrique du centre par rapport au pied de la parallèle menée par le point à l'autre asymptote; autrement dit, la tangente en un point de l'hyperbole est partagée en deux parties égales par le point de contact et les asymptotes, ce qui fournit la construction connue de la tangente à l'hyperbole.

4. — Si nous transformons une parabole ayant pour équation $x^2 - 2py = 0$, nous trouvons

$$X^2Y = 2pa^2.$$

(*) Cette propriété s'établit aussi, et très simplement, en considérant deux points voisins sur f et les points correspondants sur F. G. L.

Si nous appliquons encore ici la remarque 2, et si nous désignons par t le point de rencontre, avec Ox, de la tangente à la parabole, nous avons, en conservant les notations de l'énoncé

$$OT = OP + PT = OP + tP.$$

Or d'après une propriété bien connue de la parabole

$$tP = Ot = \frac{OP}{2}.$$

Donc $$OT = OP + \frac{OP}{2} = \frac{3}{2} OP.$$

5. — Démontrons enfin, au moyen de cette transformation, qu'une courbe algébrique ne peut pas avoir de point d'arrêt.

Supposons en effet que la courbe f ait un point d'arrêt, et prenons ce point pour origine.

En vertu des formules de transformation

$$x = X \qquad yY = a^2,$$

à ce point correspond un point de Oy rejeté à l'infini. Si une seule branche de courbe ou un nombre impair de branches de courbes aboutissaient à l'origine dans f, il en résulterait qu'une seule branche de courbe ou un nombre impair de branches de courbes seraient asymptotes à Oy dans F. Ce résultat est contraire aux propriétés connues des asymptotes. Donc f ne peut pas avoir de point d'arrêt.

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Lévy, (lycée de Nancy classe de M. Hervieux) et Barthe.

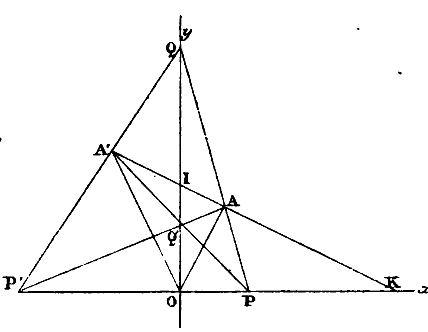
QUESTION 149

Solution par M. Giat (élève du Lycée Saint-Louis, classe de M. Ed. Lucas)

On considère deux droites rectangulaires Ox *et* Oy *et un point fixe* A; *de l'origine* O, *comme centre, avec un rayon variable on décrit une circonférence* Δ *à laquelle on mène, par* A, *deux tangentes qui coupent les axes aux points* P, Q, P', Q'. *Cela posé, on joint* PQ_1 *et* P'Q; *ces droites se coupent en un point* A' *dont on demande le lieu.*

On expliquera par des considérations géométriques le résultat, en apparence singulier, auquel a conduit le calcul.

Soient α et β les coordonnées du point A, les tangentes menées, de ce point, à un cercle O, ont pour équation :



$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = r,$$
$$x \cos\varphi' + y \sin\varphi' = r;$$

φ et φ' étant liés par les équations :

$$\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi = r, \quad (1)$$
$$\alpha \cos\varphi' + \beta \sin\varphi' = r. \quad (2)$$

En cherchant l'intersection de ces tangentes par les axes de coordonnées, on obtient les longueurs OP, OQ, OP′, OQ′ :

$$\text{OP} = \frac{r}{\cos\varphi} \qquad \text{OP}' = \frac{r}{\cos\varphi'}$$
$$\text{OQ} = \frac{r}{\sin\varphi} \qquad \text{OQ}' = \frac{r}{\sin\varphi'}$$

L'équation de PQ′ est donc :

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi' = r, \quad (3)$$

et celle de P′Q $\quad x \cos\varphi' + y \sin\varphi = r. \quad (4)$

En éliminant φ, φ' et r, entre les équations (1), (2), (3) et (4), nous aurons le lieu du point A.

Nous pouvons d'abord remplacer les équations (3) et (4) par leur somme et leur différence :

$$x(\cos\varphi + \cos\varphi') + y(\sin\varphi + \sin\varphi') = 2r$$
$$= \alpha(\cos\varphi + \cos\varphi') + \beta(\sin\varphi + \sin\varphi'), \quad (5)$$
$$x(\cos\varphi - \cos\varphi') - y(\sin\varphi - \sin\varphi') = 0. \quad (6)$$

L'équation (5) donne :

$$-\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \frac{\cos\varphi + \cos\varphi'}{\sin\varphi + \sin\varphi'} = \frac{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}.$$

Mais $\quad \dfrac{\cos\varphi - \cos\varphi'}{\sin\varphi - \sin\varphi'} = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}},$

L'équation (5) devient donc :

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=0. \qquad (7)$$

De même, l'équation (6) devient :

$$\frac{y}{x}+\frac{\beta}{\alpha}=0. \qquad (8)$$

Le point A' est donc situé sur les droites fixes (7) et (8). Par suite il est fixe.

Ce singulier résultat peut se démontrer géométriquement. En effet prenons les deux tangentes AP et AP'. La droite AO est bissectrice de l'angle P'AP. Dans le quadrilatère complet AQA'Q' les diagonales se divisent harmoniquement. Donc les deux faisceaux (A.P'POK)(O.A'AIK) sont harmoniques. Par suite AC est bissectrice de l'angle extérieur du triangle PAP'. Donc cette droite AA' est perpendiculaire sur AO. Elle est fixe.

Ensuite, comme les deux droites homologues OI, OK du deuxième faisceau sont perpendiculaires, elles sont les bissectrices de l'angle A'OA. Le point A' est donc aussi sur la droite fixe OA', symétrique de OA par rapport à Oy.

NOTA. — Nous avons reçu de nombreuses solutions de cette question, mais toutes ces rédactions (celle de M. Ferval exceptée) sont inexactes; elles trouvent, pour n'avoir pas poussé à fond l'élimination des paramètres variables, que le lieu demandé est une droite.

QUESTIONS PROPOSÉES

234. — Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dans lesquelles le diamètre parallèle à l'un des côtés du triangle conserve une longueur constante.

(Question posée aux Examens oraux d'admission à l'École Polytechnique en 1887.)

235. — La quantité

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

n'est pas égale à un nombre entier. *(E. Catalan.)*

236. — D'un point M, on peut mener à une parabole donnée trois normales; trouver le lieu du point pour lequel les pieds de ces normales forment un triangle d'aire donnée.

ERRATA. — Page 207, *n°4*, le groupement des termes a été mal fait. Comme nous l'ont fait observer plusieurs correspondants, il faut écrire

$$\frac{1}{2(L2)^p} + \frac{1}{3(L3)^p} > \frac{1}{(L2)^p}$$

$$\frac{1}{4(L4)^p} + \dots + \frac{1}{7(L7)^p} < \frac{1}{(L4)^p}$$

....

Plusieurs fautes typographiques se sont glissées dans la solution de la question 118, p. 160 :
etc...,

Page 261, ligne 3, en remontant,

au lieu de $(x^2 - 1)^{p-n}$ *lisez* $(x^2 - 1)^{n-p}$

et ligne 3, en descendant,

au lieu de $= 1$ *lisez* $= 0$

Page 262, avant-dernière ligne, le premier P_{p-1} doit être changé en P_{p+1}

Page 263, les quatre premières lignes comportent le signe : $= 0$, qui a été oublié; puis, ligne 7,

au lieu de $x^2 - p$ *lisez* $x^2 - 1$

et ligne 9,

au lieu de $(n^2 - 1)^{n-p}$ *lisez* $(x^2 - 1)^{n-}$

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23714-7.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Questions diverses.

Concours.

Variétés.

Bibliographie.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS